Олимпиада школьников «Ломоносов», 2012 г.

Ответы на задания заключительного этапа по **геологии**

Вариант / Задание	Вариант 1.	Вариант 2.
Задание 1.	$33\frac{1}{3}$ с	$86\frac{2}{3}$ с
Задание 2.	2833 с	2900 с
Задание 3.	$-1 < b \le 0$	$\frac{\sqrt{17}-5}{2} \le b \le 1$
Задание 4.	≈6000 $м^3$	≈4000 $м^3$
Задание 5.	$\arccos(\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{8})$	$\arccos(\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{8})$
Задание 6.	a<1,33 см	a<0,97 см

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов». 2012 год.

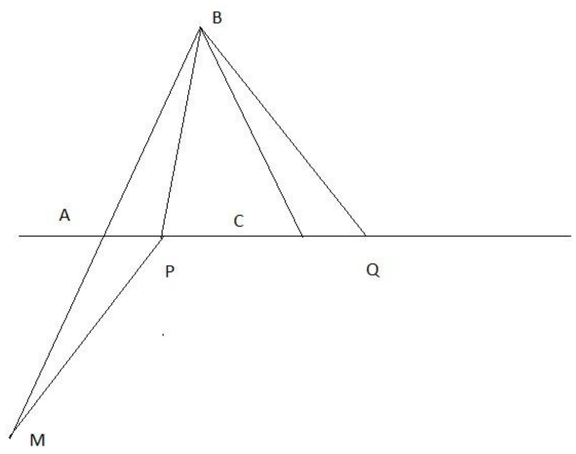
ГЕОЛОГИЯ

Вариант 1

Решения

Задание 1. Задача в математической постановке сводится к следующему. На прямой расположены точки A,C, длина отрезка AC равна 8 км. Точка B находится на расстоянии 3 км от прямой. Требуется выяснить, при каком положении точки B относительно отрезка AC сумма длин отрезков BA и BC минимальна. Пусть H – основание перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую AC. Покажем, что сумма длин отрезков BA и BC минимальна в том и только в том случае, если точка H делит отрезок пополам, т.е. в случае равнобедренного треугольника ABC. Для этого на прямой рассмотрим равнобедренный треугольник ABC: BA=BC, AH=CH=4 км, и две произвольные точки P и Q, для которых длина отрезка PQ равна 8 км. Для определенности считаем, что точки P и Q лежат справа от A и C соответственно (см. рис.). Пусть далее точка M лежит на продолжении BA за точку A, при этом AB=AM. Докажем равенство треугольников APM и BCQ. Для этого заметим, что отрезки AP и CQ равны, аналогично равны отрезки CB и AM. Кроме того, из равенства углов BAC и BCA следует, что угол MAP равен углу BCQ. Следовательно, треугольники APM и BCQ равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно, PM=BQ. Поскольку длина отрезка меньше длины ломаной, соединяющей его концы, то BP+BQ=BP+PM>BA+AM=BM=BA+BC. Следовательно, для равнобедренного треугольника ABC сумма длин боковых сторон минимальна среди всех треугольников с основанием длины 8 км. Сумма длин указанных боковых сторон равнобедренного треугольника ABC равна BA+BC=10 км. Волна пройдет это расстояние за $33\frac{1}{3}$ с.

Ответ: Треугольник ABC равнобедренный, $33\frac{1}{3}$ с.



Задание 2. Считая, что сейсмические станции находятся в вершинах (плоского) треугольника ABC на поверхности Земли, стороны которого $AB=s_1$, $BC=s_2$, $AC= s_3$ известны, и учитывая, что все точки A, B, C равноудалены от эпицентра землетрясения, видим, что все три станции находятся на окружности, описанной около треугольника ABC, причем центр окружности совпадает с эпицентром землетрясения. Для нахождения радиуса R описанной окружности заметим, что площадь треугольника ABC может быть посчитана, с одной стороны, по формуле Герона

$$S=\sqrt{p(p-s_1)(p-s_2)(p-s_3)}\ ,$$

где $p= (s_1+s_2+s_3)/2$ – полупериметр треугольника, а с другой стороны, равна

$$S= s_1s_2s_3/(4R),$$

откуда

$$R= s_1s_2s_3/[4\sqrt{p(p-s_1)(p-s_2)(p-s_3)}].$$

Следовательно, время t, необходимое волне цунами, чтобы пройти расстояние от эпицентра землетрясения до станций равно

$$t= R/v = s_1s_2s_3/[4v\sqrt{p(p-s_1)(p-s_2)(p-s_3)}]. \qquad (1)$$

Получение численного значения величины t в случае использованных в задаче конкретных значений s_1, s_2, s_3 может быть существенно упрощено и выполнено без использования формулы (1), если заметить, что стороны рассматриваемого в задаче треугольника ABC удовлетворяют теореме Пифагора: $(s_1)^2 +(s_2)^2 =(s_3)^2$, так что угол треугольника ABC, противолежащий стороне AC (с длиной s_3), является прямым, а сама эта сторона является диаметром описанной окружности. В результате сразу можно написать $R= s_3/2$, и соответственно, $t= s_3/(2v)$=850км/(2*150м/с)= 2833 с.

Ответ: 2833 с.

Задание 3. Функция $m(h)=b+2+2(b+3)h-h^2$ имеет смысл содержания полезного компонента, следовательно, $m(0)=b+2\geq 0$, т.к. на поверхности это содержание неотрицательно. Обозначив $c=b+2\geq 0$, рассмотрим функцию $f(h)=c+2(c+1)h-h^2$. Ее максимальное значение достигается в точке $h_*=c+1\geq 1$ и значение в этой точке отличается от указанного в условии значения 8 не более чем на 3. Следовательно, для выполнения условия задачи необходимо и достаточно выполнения неравенства $|c+2(c+1)^2-(c+1)^2-8|\leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} c^2+3c-10\leq 0, \\ c^2+3c-4\geq 0 \end{cases}.$ Решая полученную систему, получим $1\leq c\leq 2$.

Ответ: $-1<b\leq 0$

Задание 4. Найдем массу m_1 испарившегося за сутки метана, используя уравнение Клапейрона–Менделеева: $pV=\dfrac{m}{M}RT$. Отсюда $m_1=\dfrac{pV_1M}{RT}$, где T = 273 К – абсолютная температура метана при нормальных условиях.

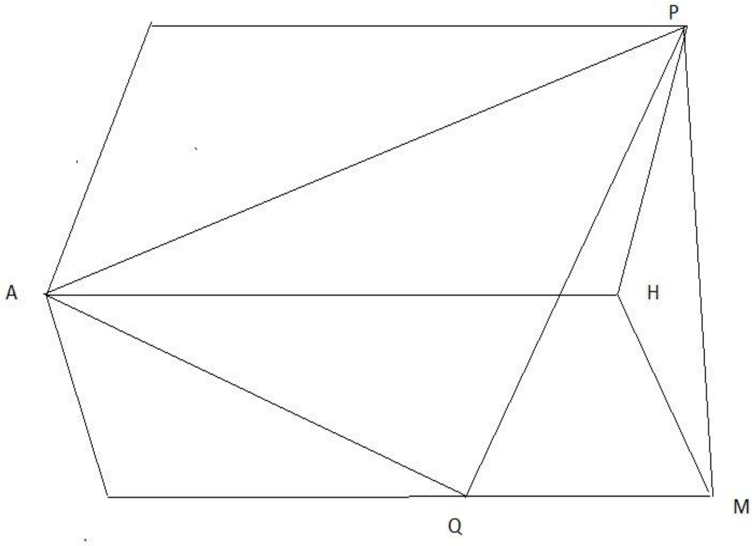
Масса метана, испарившегося за месяц, $m_2=m_1\cdot\dfrac{\tau_2}{\tau_1}$, где τ_1 = 1 сут., τ_2 = 1 мес. = 30 сут. Эта масса составляет долю α = 2 % общей массы сжиженного метана в хранилище. Поэтому масса сжиженного метана в хранилище $m=\dfrac{m_2}{\alpha}=\dfrac{m_1\tau_2}{\alpha\tau_1}=\dfrac{pV_1M\tau_2}{\alpha\tau_1RT}$. Отсюда получим объем сжиженного метана: $V=\dfrac{m}{\rho}=\dfrac{pV_1M\tau_2}{\alpha\tau_1RT\rho}\approx 6000$ м^3.

Ответ: ≈6000 м^3

Задание 5. По условию двугранный угол между плоскостями SAB, CAB равен $\pi/4$. На луче AS отложим отрезок AP=2, опустим из AP перпендикуляр PH на прямую AB, тогда PH=1,AH=$\sqrt{3}$ (см. рис.). На луче AC отложим отрезок AQ=2, в плоскости ABC отложим отрезок QM||AB, HM перпендикулярно AB. Тогда PH=1,HM=$\sqrt{3}$,QM=$\sqrt{3}$-1. Кроме того, плоскость PMH перпендикулярна AB, а из треугольника PMH по теореме косинусов имеем $PM^2=1+(\sqrt{3})^2-2\cdot 1\cdot\sqrt{3}\dfrac{\sqrt{2}}{2}=4-\sqrt{6}$. Поскольку при этом треугольник PMQ прямоугольный, то $PQ^2=MQ^2+PM^2=(\sqrt{3}-1)^2+4-\sqrt{6}=8-\sqrt{6}-2\sqrt{3}$. Теперь из треугольника PAQ по теореме косинусов $PQ^2=AP^2+AQ^2-2\cdot AP\cdot AQ\cdot\cos\alpha=8-8\cos\alpha\Leftrightarrow 8-8\cos\alpha=8-\sqrt{6}-2\sqrt{3}$.

Следовательно, косинус искомого угла равен $\dfrac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{8}$.

Ответ: $\arccos(\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{8})$.

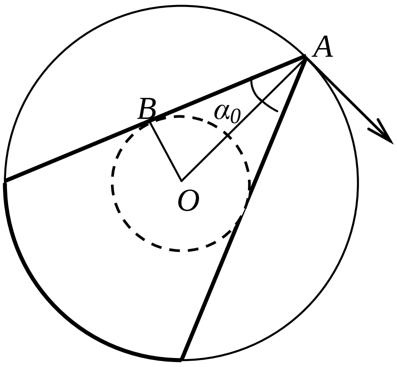


Задание 6. Объект будет виден из любой точки пространства в том и только в том случае, если идущие от него прямые лучи выходят из всех точек поверхности шара, не испытав полного внутреннего отражения. Действительно, тогда вследствие непрерывной зависимости наклона преломленных лучей от координат точки их выхода из шара они «покроют» все пространство вне шара.

Для точки *A*, показанной на рисунке, дозволенная область нахождения объекта выделена жирной линией: она ограничена поверхностью конуса «со сферическим основанием» с углом раствора $2\alpha_0$, где предельный угол α_0 определяется условием $sin\alpha_0 = 1/n$. Когда точка *A* пробегает по всей поверхности шара, отрезок *OB* покрывает шар радиуса $OB = R\,sin\alpha_0 = R/n$, который и представляет собой область нахождения объекта, удовлетворяющую условию задачи.

Таким образом, a≤R/n. Поскольку R/n = 2см/1.5=1.33 см, то $a \le 1.33см$

Ответ: $a \le 1.33см$.



Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов». 2012 год.

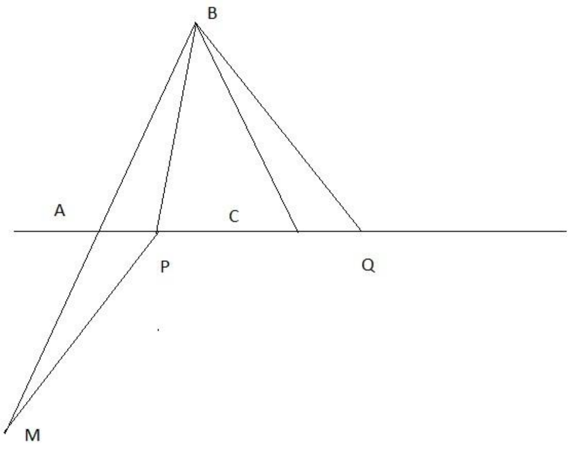
ГЕОЛОГИЯ

Вариант 2

Решения

Задание 1. Задача в математической постановке сводится к следующему. На прямой расположены точки A,C, длина отрезка AC равна 10 км. Точка B находится на расстоянии 12 км от прямой. Требуется выяснить, при каком положении точки B относительно отрезка AC сумма длин отрезков BA и BC минимальна. Пусть H – основание перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую AC. Покажем, что сумма длин отрезков BA и BC минимальна в том и только в том случае, если точка H делит отрезок пополам, т.е. в случае равнобедренного треугольника ABC. Для этого на прямой рассмотрим равнобедренный треугольник ABC: BA=BC, AH=CH=4 км, и две произвольные точки P и Q, для которых длина отрезка PQ равна 10 км. Для определенности считаем, что точки P и Q лежат справа от A и C соответственно (см. рис.). Пусть далее точка M лежит на продолжении BA за точку A, при этом AB=AM. Докажем равенство треугольников APM и BCQ. Для этого заметим, что отрезки AP и CQ равны, аналогично равны отрезки CB и AM. Кроме того, из равенства углов BAC и BCA следует, что угол MAP равен углу BCQ. Следовательно, треугольники APM и BCQ равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно, PM=BQ. Поскольку длина отрезка меньше длины ломаной, соединяющей его концы, то BP+BQ=BP+PM>BA+AM=BM=BA+BC. Следовательно, для равнобедренного треугольника ABC сумма длин боковых сторон минимальна среди всех треугольников с основанием длины 10 км. Сумма длин указанных боковых сторон равнобедренного треугольника ABC равна BA+BC=26 км. Волна пройдет это расстояние за $86\frac{2}{3}$ с.

Ответ: Треугольник ABC равнобедренный, $86\frac{2}{3}$ с.



Задание 2. Считая, что сейсмические станции находятся в вершинах (плоского) треугольника ABC на поверхности Земли, стороны которого $AB=s_1$, $BC=s_2$, $AC= s_3$ известны, и учитывая, что все точки A, B, C равноудалены от эпицентра землетрясения, видим, что все три станции находятся на окружности, описанной около треугольника ABC, причем центр окружности совпадает с эпицентром землетрясения. Для нахождения радиуса R описанной окружности заметим, что площадь треугольника ABC может быть посчитана, с одной стороны, по формуле Герона

$$S=\sqrt{p(p-s_1)(p-s_2)(p-s_3)}\ ,$$

где $p= (s_1+s_2+s_3)/2$ – полупериметр треугольника, а с другой стороны, равна

$$S= s_1s_2s_3/(4R),$$

откуда

$$R= s_1s_2s_3/[4\sqrt{p(p-s_1)(p-s_2)(p-s_3)}].$$

Следовательно, время t, необходимое волне цунами, чтобы пройти расстояние от эпицентра землетрясения до станций равно

$$t= R/v = s_1s_2s_3/[4v\sqrt{p(p-s_1)(p-s_2)(p-s_3)}]. \qquad (1)$$

Получение численного значения величины t в случае использованных в задаче конкретных значений s_1, s_2, s_3 может быть существенно упрощено и выполнено без использования формулы (1), если заметить, что стороны рассматриваемого в задаче треугольника ABC удовлетворяют теореме Пифагора: $(s_1)^2 +(s_2)^2 =(s_3)^2$, так что угол треугольника ABC, противолежащий стороне AC (с длиной s_3), является прямым, а сама эта сторона является диаметром описанной окружности. В результате сразу можно написать $R= s_3/2$, и соответственно, $t= s_3/(2v)=870км/(2*150м/с)= 2900$ с.

Ответ: 2900 с.

Задание 3. Функция $m(h)=b+1+2(b+2)h-h^2$ имеет смысл содержания полезного компонента, следовательно, $m(0)=b+1\geq 0$, т.к. на поверхности это содержание неотрицательно. Обозначив $c=b+1\geq 0$, рассмотрим функцию $f(h)=c+2(c+1)h-h^2$. Ее максимальное значение достигается в точке $h_*=c+1\geq 1$ и значение в этой точке отличается от указанного в условии значения 7 не более чем на 4. Следовательно, для выполнения условия задачи необходимо и достаточно выполнения неравенства $|c+2(c+1)^2-(c+1)^2-7|\leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} c^2+3c-10\leq 0, \\ c^2+3c-2\geq 0 \end{cases}$. Решая полученную систему, получим $\dfrac{\sqrt{17}-3}{2}\leq c\leq 2$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{17}-5}{2}\leq b\leq 1$

Задание 4. Найдем массу m_1 испарившегося за сутки метана, используя уравнение Клапейрона–Менделеева: $pV=\dfrac{m}{M}RT$. Отсюда $m_1=\dfrac{pV_1M}{RT}$, где T = 273 К – абсолютная температура метана при нормальных условиях.

Масса метана, испарившегося за месяц, $m_2=m_1\cdot\dfrac{\tau_2}{\tau_1}$, где τ_1 = 1 сут., τ_2 = 1 мес. = 30 сут. Эта масса составляет долю α = 3 % общей массы сжиженного метана в хранилище. Поэтому масса сжиженного метана в хранилище $m=\dfrac{m_2}{\alpha}=\dfrac{m_1\tau_2}{\alpha\tau_1}=\dfrac{pV_1M\tau_2}{\alpha\tau_1RT}$. Отсюда получим объем сжиженного метана: $V=\dfrac{m}{\rho}=\dfrac{pV_1M\tau_2}{\alpha\tau_1RT\rho}\approx 4000$ м^3.

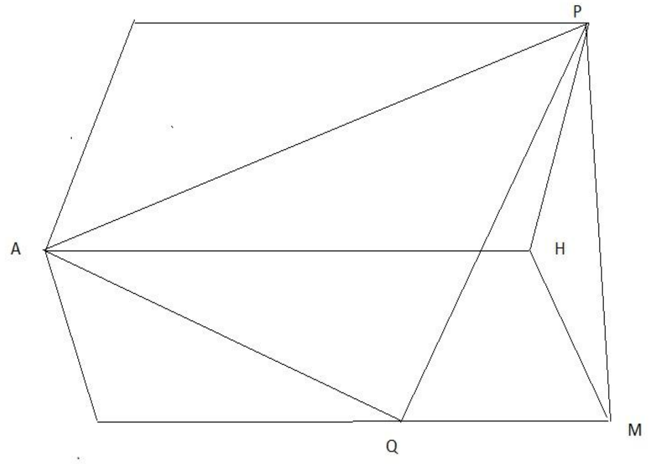
Ответ: ≈4000 м^3

Задание 5. По условию двугранный угол между плоскостями SAB, CAB равен $\pi/3$. На луче AS отложим отрезок AP=2, опустим из AP перпендикуляр PH на прямую AB, тогда PH=1,AH=$\sqrt{3}$ (см. рис.). На луче AC отложим отрезок AQ=2, в плоскости ABC отложим отрезок QM||AB, HM перпендикулярно AB. Тогда PH=1,HM=$\sqrt{2}$,QM=$\sqrt{3}$-$\sqrt{2}$. Кроме того, плоскость PMH перпендикулярна AB, а из треугольника PMH по теореме косинусов имеем $PM^2=1+(\sqrt{2})^2-2\cdot 1\cdot\sqrt{2}\dfrac{1}{2}=3-\sqrt{2}$. Поскольку при этом треугольник PMQ прямоугольный, то $PQ^2=MQ^2+PM^2=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+3-\sqrt{2}=8-\sqrt{2}-2\sqrt{6}$. Теперь из треугольника PAQ по теореме косинусов

$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2 \cdot AP \cdot AQ \cdot \cos\alpha = 8 - 8\cos\alpha \Leftrightarrow 8 - 8\cos\alpha = 8 - \sqrt{2} - 2\sqrt{6}$.

Следовательно, косинус искомого угла равен $\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{8}$.

Ответ: $\arccos(\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{8})$.



Задание 6. Объект будет виден из любой точки пространства в том и только в том случае, если идущие от него прямые лучи выходят из всех точек поверхности шара, не испытав полного внутреннего отражения. Действительно, тогда вследствие непрерывной зависимости наклона преломленных лучей от координат точки их выхода из шара они «покроют» все пространство вне шара.

Для точки *A*, показанной на рисунке, дозволенная область нахождения объекта выделена жирной линией: она ограничена поверхностью конуса «со сферическим основанием» с углом раствора $2\alpha_0$, где предельный угол α_0 определяется условием $sin\alpha_0 = 1/n$. Когда точка *A* пробегает по всей поверхности шара, отрезок *OB* покрывает шар радиуса $OB = R\,sin\alpha_0 = R/n$, который и представляет собой область нахождения объекта, удовлетворяющую условию задачи.

Таким образом, a≤R/n. Поскольку R/n = 1.5см/1.33=0.97 см, то $a \leq 0.97см$

Ответ: $a \leq 0.97см$.