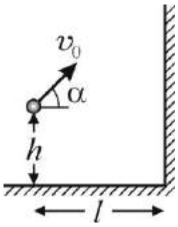
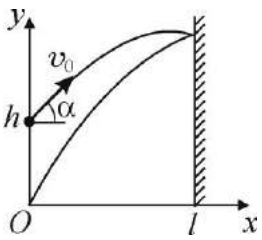
ТУР 2.



1. (17 баллов) Мальчик бросает мяч в направлении вертикальной стены так, чтобы мяч, отскочив от стены, упал точно к его ногам. Какова должна быть начальная скорость мяча v_0, если бросок производится с высоты h = 1,5 м под углом α = 45° к горизонту? Расстояние от мальчика до стены l = м. Удар мяча о стену считайте абсолютно упругим, ускорение свободного падения примите равным g = 10 м/с^2. Размером мячика и сопротивлением воздуха можно пренебречь. Ответ приведите в м/с, округлив до десятых.

Решение. Для того чтобы мяч, отскочив от стены, упал точно к ногам мальчика, траектория мяча должна иметь вид, изображенный на рисунке. При упругом ударе о неподвижную стенку угол между нормалью к стенке и скоростью мяча перед ударом равен по величине углу между нормалью к стенке и скоростью мяча после удара. Обозначим через t_0 время полета мяча. За это время он проходит по горизонтали путь $2l$. Горизонтальная составляющая скорости мяча равна $v_0 \cos\alpha$ и при полете не меняется по величине, следовательно $v_0 \cos\alpha \cdot t_0 = 2l$.

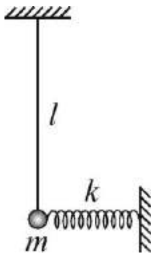


С другой стороны, в момент времени t_0 вертикальная координата мяча должна обратиться в нуль: $h + v_0 \sin\alpha \cdot t_0 - \frac{g t_0^2}{2} = 0$. Исключая из полученных соотношений t_0, находим, что $v_0 = \frac{l}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{2g}{h + 2l\,\mathrm{tg}\,\alpha}}$. **Ответ:** $v_0 = \frac{l}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{2g}{h + 2l\,\mathrm{tg}\,\alpha}}$.

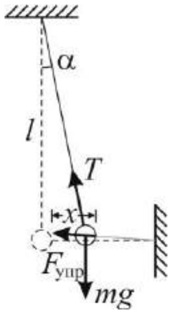
Варьируемый параметр l. Диапазон изменения от 4 до 8 м с шагом 0,4 м. Расчетная формула $v_0 = \frac{6{,}324 \cdot l}{\sqrt{1{,}5 + 2 \cdot l}}$.

l	4,0	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0
v_0	8,2	8,7	9,1	9,5	9,9	10,3	10,7	11,1	11,4	11,8	12,1

2. (22 баллов) Небольшой шарик массой $m = 0{,}1$ кг подвешен к потолку на невесомой нерастяжимой нити длиной $l = 1$ м и совершает малые колебания с периодом T_0. После того, как шарик дополнительно соединили с неподвижной стенкой посредством горизонтальной невесомой пружины, период его малых колебаний в плоскости нити и пружины стал равным T_1. При этом пружина в положении равновесия маятника не деформирована. Определите коэффициент жесткости пружины k, если параметр $n = (T_0 - T_1)/T_0 =$. Считайте, что модуль ускорения свободного падения равен $g = 10$ м/с^2, а сопротивление воздуха пренебрежимо мало. Ответ приведите в Н/м, округлив до десятых.



Решение. Шарик движется под действием сил, модули и направления которых изображены на рисунке, где mg – модуль силы тяжести, T – модуль силы натяжения нити, $F_{упр}$ – модуль силы упругости. Рассмотрим вначале колебания маятника в отсутствие пружины. Уравнение движения шарика при малых углах α отклонения маятника в этом случае имеет вид $ma = -mg\sin\alpha \approx -mg\alpha$. Учитывая, что $\alpha \approx \frac{x}{l}$, где x – горизонтальное смещение шарика, перепишем это уравнение в виде $a = -\frac{g}{l}x$. Оно описывает гармонические колебания шарика на нити с периодом $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. При наличии пружины к силам mg и T добавляется сила упругости, проекция которой на горизонтальное направление приближенно равна $(F_{упр})_x \approx -kx$. Уравнение движения шарика, прикреплённого к стене пружиной, $ma = -\frac{mg}{l}x - kx$, или $a = -\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)x$. Решение этого уравнения представляет собой гармонические колебания с периодом $T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{m}}}$. Параметр n, заданный в условии, удобно преобразовать к виду $n = \frac{T_0 - T_1}{T_0} = 1 - \frac{T_1}{T_0} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{kl}{mg}}}$. Отсюда



$$k = \frac{mg}{l} \cdot \frac{n(2-n)}{(1-n)^2}.$$

Ответ: $k = \frac{mg}{l} \cdot \frac{n(2-n)}{(1-n)^2}$.

Варьируемый параметр n. Диапазон изменения от 0,45 до 0,95 с шагом 0,05. Расчетная формула

$$k = \frac{n(2-n)}{(1-n)^2}.$$

n	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
k	2,3	3,0	3,9	5,5	7,2	10,1	15,0	24,0	43,4	99,0	399,0

3. (21 баллов) В прочном горизонтальном цилиндре под поршнем находится смесь азота и гелия при температуре $T = 84$ К и давлении $p = 200$ кПа. Поршень медленно вдвигают в цилиндр, изотермически сжимая смесь. При уменьшении объёма в $n =$ раз на стенках сосуда появляются капельки жидкости. Давление насыщенных паров азота при температуре T равно $p_{н.п.} = 208$ кПа. Пренебрегая массой и объёмом сконденсировавшейся жидкости, определите отношение k числа молекул гелия к числу молекул азота в цилиндре. Критическая температура для паров азота равна T_1 =126 К, для паров гелия T_2 =4,2 К. Ответ округлите до сотых.

Решение. Согласно закону Дальтона давление в цилиндре равно сумме парциальных давлений гелия и азота. Согласно уравнению Менделеева-Клапейрона $p=\frac{\nu_{\mathrm{He}}+\nu_{\mathrm{N2}}}{V}RT$, где V – начальный объём смеси газов, ν_{He} и ν_{N2} – количества молей гелия и азота. При указанной температуре гелий конденсироваться не может, так как находится при температуре, выше критической, а азот может. При изотермическом сжатии в n раз давление азота становится равным давлению его насыщенных паров, а потому давление в цилиндре становится равным $np=\frac{n\nu_{\mathrm{He}}}{V}RT+p_{\text{н.п.}}$. Отсюда $\nu_{\mathrm{He}}=\left(np-p_{\text{н.п.}}\right)\frac{V}{nRT}$. Поскольку $\nu_{\mathrm{N2}}=\frac{p_{\text{н.п.}}V}{nRT}$, то искомое отношение числа молекул гелия к числу молекул азота в цилиндре $k=\frac{N_{\mathrm{He}}}{N_{\mathrm{N2}}}=\frac{\nu_{\mathrm{He}}}{\nu_{\mathrm{N2}}}=\frac{np}{p_{\text{н.п.}}}-1$. **Ответ:** $k=\frac{np}{p_{\text{н.п.}}}-1$.

Варьируемый параметр *n*. Диапазон изменения от 2 до 4 с шагом 0,2. Расчётная формула $k=0{,}9615\cdot n-1$.

n	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0
k	0,92	1,11	1,31	1,50	1,69	1,88	2,08	2,27	2,46	2,65	2,85

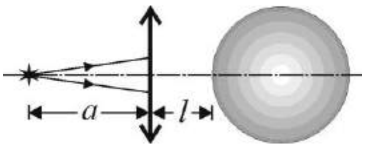
4. (23 баллов) Плоская рамка площадью S = 25 см^2, изготовленная из тонкой проволоки, помещена в однородное магнитное поле с индукцией B = 1 Тл, перпендикулярной плоскости рамки. Если рамку медленно повернуть на 180° вокруг оси, лежащей в её плоскости, то по рамке протечёт заряд q = мКл. Пренебрегая индуктивностью рамки, определите среднюю тепловую мощность $N_{\text{ср}}$, выделяющуюся в рамке при её вращении вокруг той же оси с угловой скоростью ω = 60 рад/с. Ответ выразите в милливаттах, округлив до сотых.

Решение. При повороте рамки изменяется пронизывающий ее магнитный поток Ф, поэтому в рамке возникает электрический ток $I=\frac{1}{R}\cdot\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, где R – сопротивление рамки. Отсюда получаем связь между изменением магнитного потока $\Delta\Phi$ и протекшим по рамке зарядом $\Delta q=I\Delta t$, а именно $\Delta q=\frac{\Delta\Phi}{R}$. Поскольку $R=\mathrm{const}$, такая же связь справедлива и для конечных приращений заряда и магнитного потока. При повороте рамки на 180° магнитный поток меняется на $\Delta\Phi=2BS$. Следовательно, $q=\frac{2BS}{R}$, откуда сопротивление рамки $R=\frac{2BS}{q}$. При вращении рамки с угловой скоростью ω и при надлежащем выборе начала отсчёта времени магнитный поток через плоскость рамки меняется по закону $\Phi(t)=BS\sin(\omega t)$. Протекающий по рамке индукционный ток равен $I(t)=\frac{\dot{\Phi}}{R}=\frac{BS\omega}{R}\cos(\omega t)$, где точкой над буквой обозначена производная по времени. Выделяющаяся в рамке мгновенная мощность $N(t)=I^2(t)R$. Учитывая, что среднее значение квадрата гармонической функции за период равно $\frac{1}{2}$, находим искомую среднюю тепловую мощность $N_{\text{ср}}=\frac{BSq\omega^2}{4}$. **Ответ:** $N_{\text{ср}}=\frac{BSq\omega^2}{4}$

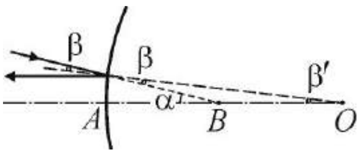
Варьируемый параметр q. Диапазон изменения от 1 до 11 мКл шагом 1 мКл. Расчётная формула $N_{ср} = 2{,}25 \cdot q$.

q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$N_{ср}$	2.25	4,50	6,75	9,00	11,25	13,50	15,75	18,00	20,25	22,50	24,75

5. (17 баллов) На главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см на расстоянии $a =$ см от нее находится точечный источник, испускающий узкий пучок света. По другую сторону линзы на расстоянии $l = 10$ см от неё расположен зеркальный шар, центр которого лежит на главной оптической оси линзы. Определите радиус шара R, если лучи, отражённые от него собираются в фокусе линзы, ближайшем к источнику. Учтите, что для малых значений аргумента x, заданного в радианах, справедлива приближенная формула $\operatorname{tg} x \approx x$. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до десятых.



Решение. Лучи, отражённые от зеркального шара, соберутся в переднем фокусе линзы, если они параллельны главной оптической оси линзы. Рассмотрим луч, падающий под малым углом β на поверхность зеркального шара (см. рисунок, на котором точка O − центр шара). Согласно закону отражения, угол $\alpha = 2\beta$, а в силу того, что отраженный луч параллелен главной оптической оси системы, $\beta' = \beta$. Из рисунка видно, что $AB \cdot \operatorname{tg}\alpha = AO \cdot \operatorname{tg}\beta$. С учетом малости углов α и β приближенно получаем, что $AB \approx \dfrac{AO}{2} = \dfrac{R}{2}$.



Следовательно, условие задачи будет выполнено, если изображение источника, создаваемое линзой, находится внутри шара на расстоянии $\dfrac{R}{2}$ от его поверхности. Используя формулу линзы, находим, что $\dfrac{a \cdot F}{a - F} = l + \dfrac{R}{2}$. Отсюда $R = 2\left(\dfrac{a \cdot F}{a - F} - l\right)$. **Ответ:** $R = 2\left(\dfrac{a \cdot F}{a - F} - l\right) = 20$ см.

Варьируемый параметр a. Диапазон изменения от 20 до 40 см с шагом 2 см. Расчетная формула $R = 2 \cdot \left(\dfrac{10 \cdot a}{a - 10} - 10\right)$.

a	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
R	20,0	16,7	14,3	12,5	11,1	10,0	9,1	8,3	7.7	7,1	6,7