7, 8 и 9 классы.

Возможные решения и критерии проверки.

Задание отборочного тура состояло из тестовой части (проверялись только **ответы**) и творческой части (проверялись и оценивались **решения**).

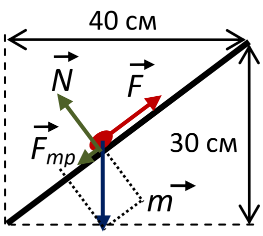
Часть I . Тестовое задание: пример варианта.

Вопрос 1 (8 баллов):

Из ровных деревянных планок изготовлена подставка в виде прямоугольного треугольника со сторонами 30см, 40 см и 50 см. Сначала подставку установили так, что катет 30 см был вертикален, а катет 40 см – горизонтален, и по гипотенузе, как по наклонной плоскости, медленно провели небольшой груз (с помощью нити, идущей вдоль плоскости). Затем подставку переставили: теперь катет 40 см был вертикален, а катет 30 см – горизонтален. Подъем груза повторили. Оказалось, что силы натяжения нити в первом и втором опыте соотносились как $F_2 : F_1 = 7:6$. Найдите коэффициент трения груза о плоскость гипотенузы. Ответ запишите в десятичной форме, при необходимости округлив до сотых.

Ответ: 0,30.

Пояснение: При медленном затаскивании сумма приложенных к грузу сил должна



равняться нулю. Поэтому сила F должна уравновешивать сумму силы трения скольжения (то есть μN, где N – сила нормальной реакции плоскости) и проекции силы тяжести на плоскость. Как видно из рисунка, с учетом подобия треугольников, для первого опыта $F_1 = \frac{3}{5}mg + \mu\frac{4}{5}mg$. Аналогично для второго $F_2 = \frac{4}{5}mg + \mu\frac{3}{5}mg$.

Поэтому $\frac{F_2}{F_1} = \frac{4+3\mu}{3+4\mu} = \frac{7}{6} \Rightarrow \mu = \frac{3}{10}$.

Вопрос 2 (8 баллов):

В вертикальном цилиндрическом сосуде с теплоизолирующими гладкими стенками под подвижным поршнем находится 40 г воды с температурой 0°C. Вес поршня и внешнее давление подобраны так, чтобы давление под поршнем в точности равнялось 1 Атм. В сосуд вводят 10 г водяного пара с температурой 101°C. Какой будет температура содержимого сосуда после установления теплового равновесия? Удельная теплоемкость воды 4,2 Дж/г, удельная теплоемкость пара в условиях опыта равна примерно 1,85 Дж/г, удельная теплота парообразования для воды 2480 Дж/г. Ответ запишите в градусах Цельсия.

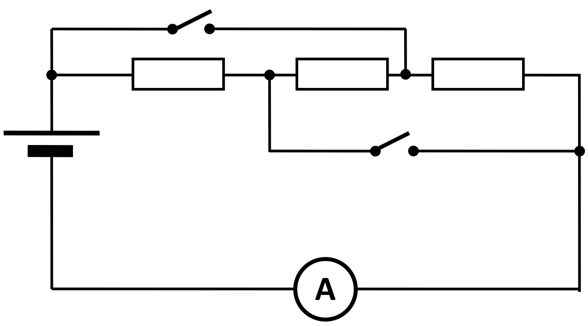
Ответ: 100.

Пояснение: При охлаждении пара до 100°C выделится 1,85×10=18,5 Дж тепла. Прежде чем продолжить остывание, пару нужно сконденсироваться. При полной конденсации пара выделится 2480×10=24800 Дж. Для нагрева жидкой воды до 100°C нужно 4,2×40×100=16800 Дж, то есть очевидно больше, чем выделится только при остывании, и очевидно меньше, чем выделится при остывании и конденсации пара. Это означает, что пар остынет до 100°C, но сконденсируется только частично – настолько, чтобы нагреть воду до равновесной температуры 100°C. Значит, в конечном состоянии мы имеем находящиеся в равновесии воду и пар при температуре 100°C.

Вопрос 3 (9 баллов):

В схеме, показанной на рисунке, сопротивление всех соединительных проводов и контактов ключей пренебрежимо мало. Все три резистора одинаковы. Пока оба ключа были разомкнуты, амперметр показывал силу тока в цепи, равную 1 А. Когда один из ключей замкнули, сила тока возросла до 2 А. Какой станет сила тока, если замкнуть и второй ключ? Считать, что провода и приборы не выйдут из строя. Ответ запишите в Амперах, без указания единиц.

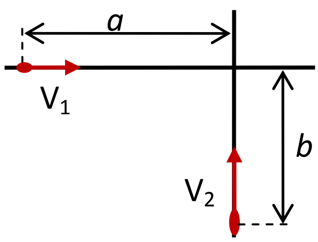
Ответ: 3.



Пояснение: Пока оба ключа были разомкнуты, то ток тек через три последовательно соединенных резистора. Поэтому ток в первом случае $I_1 = \frac{\mathrm{E}}{3R + r}$, где мы обозначили: Е – ЭДС источника (равную напряжению, которое источник создает на своих клеммах при разомкнутой цепи), r – внутреннее сопротивление источника, а R – сопротивление каждого из резисторов. После замыкания одного из ключей (любого) два резистора оказываются закороченными, и ток течет только через один резистор. Поэтому $I_2 = \frac{\mathrm{E}}{R + r} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{3R + r}{R + r} = 2$, и поэтому $r = R$. После замыкания второго ключа оказывается, что ток опять течет через все три резистора, но они оказываются подключены к клеммам источника параллельно. Поэтому $I_3 = \frac{\mathrm{E}}{(R/3) + r}$, и мы можем найти, что $\frac{I_3}{I_1} = \frac{3(3R + r)}{R + 3r} = 3$, то есть $I_3 = 3$ А.

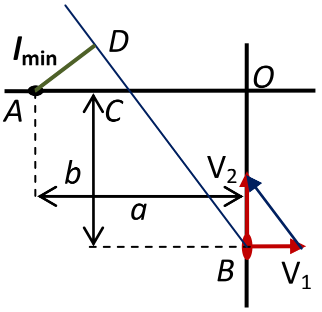
Часть II (творческое задание).

1. (**«Перекресток»**) Два автомобиля подъезжают по разным дорогам к перекрестку (дороги пересекаются под прямым углом – см. рисунок). Скорость «первого» автомобиля $V_1 = 54$ км/час, а второго – $V_2 = 72$ км/час. В тот момент времени, когда первому автомобилю осталось проехать до перекрестка расстояние $a = 400$ м, второму осталось до перекрестка $b = 300$ м. В дальнейшем скорости автомобилей не изменяются. Найдите минимальное расстояние между автомобилями в процессе движения.



Решение:

Так как нас спрашивают только про величину, характеризующую относительное положение автомобилей, то удобная система отсчета – связанная с одним из автомобилей. Рассмотрим движение в СО «автомобиль 1». Отметим характерные точки так, как показано на рисунке. В этой СО автомобиль 1 покоится, а автомобиль 2 движется с постоянной скоростью $\vec{V}_2' = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$. Построив векторный треугольник скоростей (см. рисунок), мы находим положение линии BD, вдоль которой движется автомобиль 2 в этой системе отсчета. Минимальное расстояние равно длине перпендикуляра AD, опущенного на эту линию. Далее используем подобие треугольников. Треугольник OBC подобен треугольнику скоростей, поэтому $|OC| = \frac{V_1}{V_2} b$. Значит, $|AC| = a - \frac{V_1}{V_2} b$. Треугольник ACD тоже подобен треугольнику скоростей, поэтому $l_{\min} = |AD| = \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} |AC| = \frac{V_2 a - V_1 b}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$. Подставляя скорости, находим: $l_{\min} = \frac{4a - 3b}{5} = 140$ м.



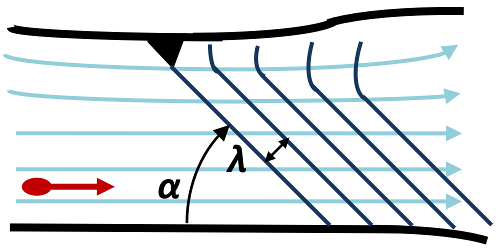
ОТВЕТ: $l_{\min} = \dfrac{V_2 a - V_1 b}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} = \dfrac{4a - 3b}{5} = 140$ м.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	макс. балл	примечания
Выбрана система отсчета и описано движение обоих автомобилей в этой СО	2	Любая СО!
Построен треугольник скоростей (для СО, связанной с одним из автомобилей) или записана формула для изменяющегося расстояния (СО «земля»)	5	
Найден минимум расстояния (геометрически или формула)	5	
Правильный численный ответ	3	
ВСЕГО	**15**	

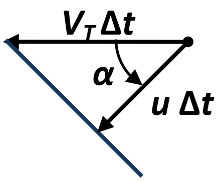
2. («**Стоячие валы**») При изучении русла реки в ходе разведывательных работ исследовательская партия вышла к почти прямолинейному участку ее берега. На противоположной стороне реки находился скальный уступ, в который ударялось течение.

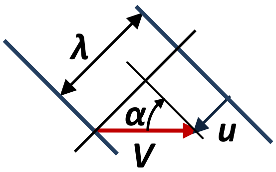
Ниже уступа по течению была видна система «водяных валов», расходящихся от уступа. Гребни валов были почти прямолинейны и ориентированы под углом $\alpha \approx 45°$ к берегу (см. рисунок). Исследователи измерили расстояние между валами $\lambda \approx 3{,}2$ м. В это время их коллега спускался вниз по течению на моторной лодке, двигавшейся со скоростью $V = 8$ м/с относительно воды. Он сообщил, что при прохождении системы валов период ударов лодки о валы равен $T \approx 0{,}4$ с. Какова скорость течения реки на этом участке?



Решение:

Перейдем в систему отсчета, связанную с водой. В этой системе отсчета уступ движется «против течения» со скоростью течения V_T. Он возбуждает волны. Наблюдаемая картина соответствует тому, что V_T больше скорости распространения волн по воде u. В самом деле,





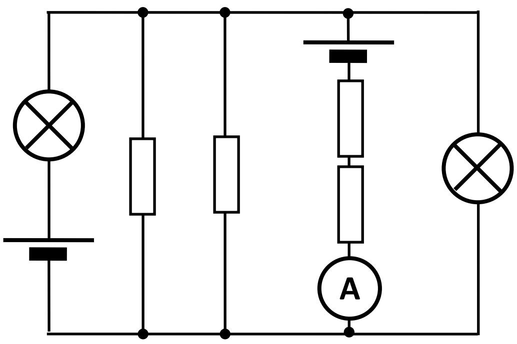
скорость распространения волны направлена перпендикулярно фронту, и за время утес сдвинется на расстояние $V_T \Delta t$, а фронт волны пройдет расстояние $u\Delta t$ (рисунок слева). Значит, угол наклона валов удовлетворяет соотношению $\sin(\alpha) = \frac{u}{V_T}$. С другой стороны, при движении лодки (ее скорость задана именно в рассматриваемой системе отсчета!) интервал времени между «встречами» с валами $T = \frac{\lambda}{V\sin(\alpha)+u}$ (на рисунке справа показано, как происходит сближение лодки и очередного фронта волны – относительно воды они движутся навстречу друг другу под углом). Подставляя сюда выражение $u = V_T \sin(\alpha)$, находим: $V_T = \frac{\lambda}{T\sin(\alpha)} - V \approx 3{,}3$ м/с.

ОТВЕТ: скорость течения $V_T = \frac{\lambda}{T\sin(\alpha)} - V \approx 3{,}3$ м/с.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

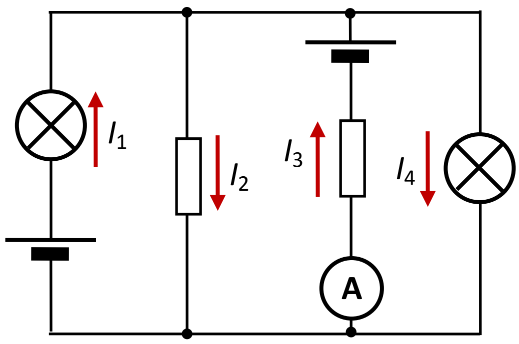
действие	макс. балл	примечания
Объяснен вид картины валов	2	На базе свойств волн
Найдена связь угла наклона валов с соотношением скоростей	5	
Найдена связь T и скоростей	5	
Правильный численный ответ	3	
ВСЕГО	**15**	

3. (**«Баланс света»**) Из четырех одинаковых резисторов, двух одинаковых ламп, двух разных аккумуляторов и амперметра собрали схему, показанную на рисунке. При этом оказалось, что обе лампы светят одинаково: мощность светового излучения каждой из них равна $P = 2{,}5$ Вт. При этом амперметр показывает ток $I = 0{,}6$ А. Известно, что КПД ламп равен $\eta = 40$ %, а сопротивление каждого из резисторов $R = 40$ Ом. Сопротивление амперметра много меньше 1 Ом. Какими станут показания амперметра, если перенести его в ветвь с одним из сопротивлений? Чему равно сопротивление ламп в режиме, в котором они работают в данной схеме?



Решение:

Для простоты расчетов заменим два параллельных резистора на один с сопротивлением $R/2$, а два последовательно соединенных – на один с сопротивлением $2R$. Обозначим общее напряжение на всех «вертикальных» (по рисунку) ветвях символом U и запишем закон Ома для участка цепи с ЭДС для каждой из ветвей:



$$\begin{cases} U = E_1 - I_1(R_Л + r_1) \\ U = I_2 \dfrac{R}{2} \\ U = E_2 - I_3(2R + r_2) \\ U = I_4 R_Л \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = \dfrac{E_1 - U}{R_Л + r_1} \\ I_2 = \dfrac{2U}{R} \\ I_3 = \dfrac{E_2 - U}{2R + r_2} \\ I_4 = \dfrac{U}{R_Л} \end{cases}$$

(нумерация ветвей и направления токов, выбранные как положительные, показаны на рисунке, $E_{1,2} > 0$ и $r_{1,2}$ – величины ЭДС и внутренних сопротивлений источников, сопротивлением амперметра пренебрегаем). Нам известно, что обе лампы светят одинаково. Это означает, что протекающий через них ток по величине одинаков. Теоретически возможны два варианта.

Первый: $I_1 = I_4$. С учетом условия непрерывности тока $I_1 + I_3 = I_2 + I_4$ находим, что выполняется также соотношение $I_3 = I_2$. Но $I_3 = I$ – это ток, измеряемый амперметром. Перенос амперметра практически не влияет на токи в схеме, и поэтому после переноса (когда амперметр будет измерять половину тока I_2), его показания уменьшатся вдвое: $I' \approx 0{,}3\,\text{А}$. Заметим также, что в соответствии с записанными уравнениями $I = I_3 = I_2 = \dfrac{2U}{R} \Rightarrow U = \dfrac{IR}{2}$. Мощность потребления ламп $\dfrac{P}{\eta} = \dfrac{U^2}{R_Л}$, и из этого соотношения находим: $R_Л = \dfrac{\eta U^2}{P} = \dfrac{\eta I^2 R^2}{4P} \approx 23\,\text{Ом}$. Отметим, что следующие значащие цифры указывать некорректно – мы пренебрегали внутренним сопротивлением амперметра, поэтому у нас есть неучтенные поправки, величина которых около 2%.

Второй: $I_1 = -I_4$. Действуя аналогично, убеждаемся, что этот вариант невозможен: в этом случае $I_3 = I_2 + \dfrac{2U}{R_Л} = \dfrac{2U(R + R_Л)}{R_Л R} \Rightarrow U = \dfrac{I R_Л R}{2(R + R_Л)}$, поэтому $\dfrac{P}{\eta} = \dfrac{I^2 R_Л R^2}{2(R_Л + R)^2}$, и для сопротивления лампы получается квадратное уравнение $R_Л^2 + 2R\left(1 - \dfrac{\eta I^2 R}{4P}\right) R_Л + R^2 = 0$ без вещественных корней.

ОТВЕТ: При переносе амперметра его показания уменьшатся в два раза ($I' \approx 0{,}3\,\text{А}$), сопротивление ламп в рабочем режиме $R_Л = \dfrac{\eta I^2 R^2}{4P} \approx 23\,\text{Ом}$.

Примечание 1: Доказательство осуществимости или неосуществимости вариантов можно провести и на базе полной системы уравнений. Для этого нужно выразить ЭДС с учетом требований к токам. Тогда для первого случая $E_1 = U\left(2 + \dfrac{r_1}{R_Л}\right)$ и $E_2 = U\left(5 + \dfrac{2r_2}{R}\right)$, а для второго $E_1 = -\dfrac{r_1}{R_Л} U$ и $E_2 = U\left(1 + \dfrac{2(R_Л + R)(2R + r_2)}{R_Л R}\right)$. Как видно, в первом случае обе ЭДС могут одновременно удовлетворять требованию $E_{1,2} > 0$, а во втором – нет.

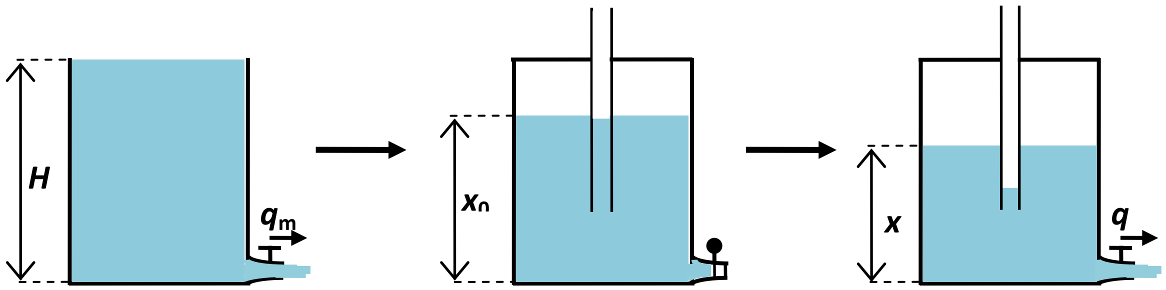
Примечание 2: Важно, что при вычислениях не должны быть использованы неизвестные параметры – такие, как ЭДС и внутренние сопротивления источников. Например, решение, в котором используются явно значения $r_1 = r_2 = 0$, не является полностью корректным.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	макс. балл	примечания
Записаны исходные соотношения токов и напряжений, необходимые для получения ответа (законы Ома, непрерывность токов, правила Кирхгофа)	3	Может быть и неполная система, если ее достаточно
Учтено условие равенства мощностей свечения ламп	2	
Найдено «новое» значение силы тока	4	
Получено уравнение для сопротивления ламп	4	
Получен правильный ответ для сопротивления	4	
Рассматривается вторая ситуация	1	
Проведен анализ реализуемости обеих ситуаций	2	По 1 баллу за каждую
ВСЕГО	**20**	

Если используется полная система с $r_1 = r_2 = 0$, и правильный ответ получен с использованием этих значений – такое решение оценивается максимум в **16 баллов**.

4. («**Очень большой сифон**») В архивах одной секретной лаборатории был найден отчет о необычном эксперименте. Для него была построена вертикальная колонна высотой $H = 6$ м. Колонна снабжена вентилем небольшого диаметра, расположенным в



самом низу колонны и снабженным очень точным электронным счетчиком расхода воды (*расход воды* – это объем воды, проходящей через вентиль в единицу времени). Если колонну заполнить целиком и открыть вентиль, то расход воды будет максимален и равен некоторой величине q_m. В ходе эксперимента колонну заполняли водой частично при запертом вентиле, закрывали сверху крышкой с тонкостенной трубкой, идущей сквозь крышку внутрь колонны, тщательно герметизировали все стыки (стенок колонны с крышкой и крышки с трубой), а затем открывали вентиль. В архиве сохранилась таблица данных о связи расхода воды (в процентах от q_m) и высоты уровня воды в колонне.

x, …	5,62	5,50	5,00	4,50	4,00	3,50	3,00	2,50	2,00
q/q_m, %	81,6	71,4	57,7	57,8	57,8	57,7	57,7	54,4	48,7

Правда, в таблице не указаны единицы измерения высоты, но в пояснениях сообщается, что погрешность всех данных равна единице последнего указанного разряда. Пользуясь имеющимися данными, ответьте на следующие вопросы:

- На какой высоте над дном колонны находится нижний конец трубы?
- Каков был начальный уровень воды в колонне в этом эксперименте?
- В каких единицах могут быть приведены высоты в таблице?
- При каком атмосферном давлении проводился эксперимент?

Атмосферное давление считайте неизменным и найдите его в мм.рт.ст. (плотность ртути примерно в 13,546 раза больше плотности воды). Все высоты нужно найти в метрах. Для всех найденных величин постарайтесь обеспечить наилучшую возможную точность, и укажите ее. Известно, что в рамках требуемой точности вязкое трение, поверхностное натяжение и сжимаемость воды можно не учитывать.

Решение:

Расход воды связан со скоростью вытекания воды v и площадью поперечного сечения потока через вентиль S соотношением $q = v \cdot S$. Скорость вытекания проще всего определить из уравнения Бернулли: если давление на уровне вентиля (то есть у дна колонны) равно p, а давление снаружи (атмосферное давление) равно p_0, то (сечение колонны много больше сечения вентиля, и скорость движения воды на уровне вентиля в колонне много меньше скорости вытекания) $p \approx p_0 + \frac{\rho v^2}{2} \Rightarrow v \approx \sqrt{\frac{2(p-p_0)}{\rho}}$, где ρ – плотность воды. Значит, $q \approx S\sqrt{\frac{2(p-p_0)}{\rho}}$. При открытой полностью заполненной колонне давление у дна $p \approx p_0 + \rho g H$, и поэтому $q_m \approx S\sqrt{2gH}$. При закрытой колонне в первый момент давление над поверхностью воды равно p_0, и давление у дна $p \approx p_0 + \rho g x_0$, поэтому начальный расход $q_0 \approx S\sqrt{2gx_0}$. Следовательно, $\frac{q_0}{q_m} = \sqrt{\frac{x_0}{H}}$. Согласно таблице, $\frac{q_0}{q_m} = 0{,}816 \pm 0{,}001$. Поэтому $\frac{x_0}{H} \approx 0{,}6659 \pm 0{,}0016$ (в промежуточных результатах для повышения точности расчетов сохраняем «лишний» разряд), и $x_0 = (4{,}00 \pm 0{,}01)$ м. По таблице $x_0 = 5{,}62 \pm 0{,}01$ неизвестных единиц длины, поэтому используемая единица длины равна $0{,}712 \pm 0{,}002$ м. В этот диапазон попадает аршин (1 аршин $\approx 0{,}7112$ м), так что лаборатория скорее всего располагалась в России. По мере вытекания воды давление над поверхностью уменьшается обратно пропорционально объему воздушного промежутка (при неизменной температуре), поэтому давление у дна $p \approx p_0 \frac{H - x_0}{H - x} + \rho g x$, поэтому скорость вытекания и расход воды через вентиль изменяются: $q(x) = q_m \sqrt{\frac{x}{H} - \frac{p_0}{\rho g H}\frac{x_0 - x}{H - x}}$ (как видно из таблицы, расход убывает). Однако при этом уменьшается давление у нижнего конца трубки, и когда оно достигнет p_0, то уровень воды в трубке опустится до ее нижнего конца, и дальше воздух начнет поступать через трубку в колонну, поддерживая давление, равное p_0 на уровне нижнего конца трубки). Поэтому давление у дна будет постоянно и равно $p \approx p_0 + \rho g h$ (где h и – высота нижнего конца трубы над дном колонны). На этом этапе расход должен быть постоянен и равен $\bar{q} = q_m \sqrt{\frac{h}{H}}$. Из таблицы видно, что расход действительно постоянен в пределах точности измерений в диапазоне $3{,}00 \le x \le 5{,}00$.

Усредняя имеющиеся значения, находим: $\frac{q}{q_m} \approx 0{,}5774$, и поэтому $\frac{h}{H} \approx 0{,}3334 \pm 0{,}0011$, что дает для высоты нижнего конца трубы над дном колонны $h = (2{,}000 \pm 0{,}007)$ м. Этот этап прекращается, когда уровень воды достигает нижнего конца трубы. Далее воздух поступает в колонну, поддерживая над поверхностью воды давление p_0, при этом давление у дна $p \approx p_0 + \rho g x$, и поэтому $q(x) = q_m \sqrt{\frac{x}{H}}$ – расход воды уменьшается, как и видно из таблицы. Как видно, атмосферное давление можно найти только по одному из значений расхода – при $x = (5{,}50 \pm 0{,}01)$ аршин $\approx (3{,}912 \pm 0{,}007)$ м. Из формулы для расхода жидкости на этом этапе найдем, что $\frac{p_0}{\rho g} = \frac{H(H-x)}{x_0 - x}\left(\frac{x}{H} - \frac{q^2}{q_m^2}\right)$, что позволяет найти атмосферное давление в мм водяного столба. Ясно, что для перевода в мм.рт.ст. нужно учесть различие плотностей: $\frac{p_0}{\rho_{PT} g} = \frac{\rho}{\rho_{PT}} \frac{H(H-x)}{x_0 - x}\left(\frac{x}{H} - \frac{q^2}{q_m^2}\right)$. Подставляя численные значения находим, что $p_0 = (1500 \pm 300)$ мм.рт.ст. (точность оказывается низкой, так как при вычислении величины $x_0 - x$ возникает очень большая ошибка – это величина около 9 см, и ошибка может быть близка к ней по порядку величины: $x_0 - x = (8{,}8 \pm 1{,}7)$ см! Обнаруживается, что в любом случае давление значительно превышало нормальное атмосферное (760 мм.рт.ст). Можно сделать вывод, что эксперимент проводился в барокамере очень значительных размеров.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	макс. балл	примечания
Записано выражение для расхода воды при полной колонне	2	
Записан закон Бернулли иди эквивалентные соотношения	3	
Определен начальный уровень воды в метрах	3	Не указана точность или указана очень «неразумно»: **- 1 балл**.
Определены единицы измерения	2	
Получена формула для $q(x)$ до начала поступления воздуха	4	
Обнаружено, что при некоторой высоте воздух начинает поступать в колонну и расход становится постоянным	3	
Определена высота конца трубы над дном колонны	3	Не указана точность или указана очень «неразумно»: **- 1 балл**.
Найдено атмосферное давление	3	
Указана (с отклонение не более чем в 1,5 раза) погрешность нахождения p_0	2	Отклонение не более чем в 2 раза: **1 балл**
ВСЕГО	**25**	