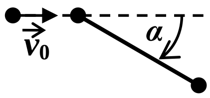
10 и 11 классы: возможные решения

БИЛЕТ № 02 (МОСКВА)

Задание 1.

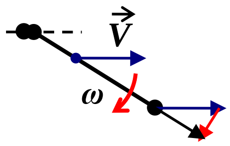
Вопрос: Назовем «линией удара» прямую, вдоль которой направлены силы взаимодействия соударяющихся тел. При каком положении этой линии тела, до удара двигавшиеся поступательно, после удара начнут вращаться?

Задача: Гантель, состоящая из двух массивных маленьких шариков и легкого жесткого стержня длины L, покоилась на гладкой горизонтальной поверхности. В один из ее шариков врезается третий (такой же), скорость которого $\vec{v}_0$ направлена под углом 30° к стержню. Происходит лобовое абсолютно неупругое соударение. Найти угловую скорость вращения «утяжеленной гантели» после удара.



Ответ на вопрос: Для того, чтобы состояние вращения тел изменилось в ходе соударения, момент сил относительно центра масс, приложенных к каждому из тел, должен отличаться от нуля. Для этого достаточно, чтобы «линия удара» не проходила через центры масс тел. Такой удар в физике называют нецентральным.

Решение задачи: Поскольку здесь «линия удара» не проходит через центр масс гантели, то после соударения она начнет вращаться. Из закона сохранения импульса можно определить, что скорость центра масс «утяжеленной гантели» после удара сонаправлена с $\vec{v}_0$, а ее величина $V = \frac{1}{3m}mv_0 = \frac{v_0}{3}$ (где m – масса каждого из шариков). Рассмотрим движение



гантели после удара как движение центра масс с этой скоростью и вращение вокруг него с угловой скоростью ω. Сила, действующая на «второй» шарик гантели (на тот, по которому не наносит удар налетающий шарик) – это сила упругости жесткого стержня, направленная вдоль стержня. Поэтому его скорость сразу после «мгновенного» удара направлена вдоль стержня и при этом является суммой скорости центра масс и скорости вращения $\vec{v}_2 = \vec{V} + \vec{v}_{\text{вр}}$, которая перпендикулярна радиусу вращения и по величине равна $v_{\text{вр}} = \omega r_2$. Так как после удара на «первом» конце гантели находятся два слипшихся шарика, то расстояние от центра масс «утяжеленной гантели» до второго шарика $r_2 = \frac{2}{3}L$. При этом из векторного треугольника скоростей видно, что $\omega r_2 = \omega \frac{2}{3}L = V\sin(\alpha) = \frac{v_0}{3}\sin(\alpha) \Rightarrow \omega = \frac{v_0}{2L}\sin(\alpha)$. При заданном значении угла $\alpha = 30°$ получаем: $\omega = \frac{v_0}{4L}$.

ОТВЕТ: $\omega = \frac{v_0}{4L}$.

Задание 2.

Вопрос: Чему равна теплоемкость одного моля одноатомного идеального газа в процессе сжатия газа, в котором его давление убывает пропорционально объему? Ответ обосновать.

Задача: Постоянное количество гелия участвует в процессе, в котором его давление сначала остается постоянным, затем возрастает в $n=2$ раза так, что его объем изменяется пропорционально давлению, а затем снова остается постоянным. Зная, что конечная температура гелия в $k=1{,}2$ раза больше начальной, и что полное количество теплоты, которым гелий обменялся с окружающими телами в этом процессе, равно нулю, найдите отношение максимального и минимального объема гелия в этом процессе.

Ответ на вопрос: Запишем уравнение процесса 1→2 в виде $p=\alpha V$. Количество теплоты в таком процессе, в соответствии с 1-ым Началом термодинамики, $Q_{12}=A_{12}+\Delta U$. Площадь под диаграммой процесса – площадь трапеции: $A_{12}=\dfrac{p_1+p_2}{2}(V_2-V_1)=\dfrac{\alpha}{2}(V_2^2-V_1^2)$. Изменение внутренней энергии $\Delta U=\dfrac{3}{2}(p_2V_2-p_1V_1)=\dfrac{3\alpha}{2}(V_2^2-V_1^2)$. Следовательно, $A_{12}=\dfrac{1}{3}\Delta U$, и поэтому $Q_{12}=\dfrac{4}{3}\Delta U$. Для одного моля $\Delta U=\dfrac{3}{2}R\Delta T$. Значит, . $Q_{12}=2R\Delta T\Rightarrow c=2R$.

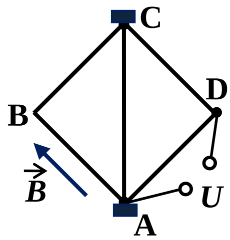
Решение задачи: Заданный процесс 1→2→3→4 состоит из изобары (молярная теплоемкость $c_p=\dfrac{5}{2}R$), процесса с $p=\alpha V$ ($c=2R$) и еще одной изобары. Таким образом, температуры состояний удовлетворяют соотношению $\dfrac{5}{2}R(T_2-T_1)+2R(T_3-T_2)+\dfrac{5}{2}R(T_4-T_3)=0$. Из этого соотношения следует, что $5T_4+T_2-T_3-5T_1=0$. По условию $T_4=kT_1$, а в процессе 2→3 давление возрастает в n раз, и во столько же раз возрастает объем, поэтому $T_3=\dfrac{1}{\nu R}p_3V_3=n^2\dfrac{1}{\nu R}p_2V_2=n^2T_2$. Объединяя эти соотношения, найдем, что $T_2=\dfrac{5(k-1)}{n^2-1}T_1=\dfrac{1}{3}T_1$. С учетом этого и характера процессов $V_2=\dfrac{1}{3}V_1$, $V_3=2V_2=\dfrac{2}{3}V_1$ и $V_4=\dfrac{3}{5}V_1$. Таким образом, $V_{\max}=V_1$ и $V_{\min}=V_2$. Значит, $\dfrac{V_{\max}}{V_{\min}}=\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{n^2-1}{5(k-1)}=3$.

ОТВЕТ: $\dfrac{V_{\max}}{V_{\min}}=\dfrac{n^2-1}{5(k-1)}=3$.

Задание 3.

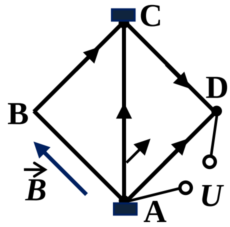
Вопрос: Контур в форме окружности закреплен шарнирно на вертикальной оси и помещен в горизонтальное магнитное поле. Опишите его поведение после появления в нем тока.

Задача: Из медной проволоки изготовлен квадратный контур с перемычкой. Контур подключен к источнику постоянного напряжения $U=1{,}5$ В между точками A и D и помещен в магнитное поле с индукцией $B=8$ мТл, причем силовые линии лежат в плоскости контура и параллельны двум его сторонам. Найдите величину и направление силы, действующей на контур со стороны магнитного поля, а также величину и направление момента сил, поворачивающего контур вокруг оси AC. Удельное сопротивление проволоки $\rho=0{,}018$ мкОм·м, площадь сечения проволоки $S=1{,}8$ мм^2, длина стороны квадрата $a=1$ м.



Ответ на вопрос: Суммарная сила Ампера, действующая на контур с током в магнитном поле, уравновешивается силой реакции оси (если поле однородно, то эта сила и вовсе равна нулю). Однако суммарный момент сил относительно оси равен нулю только при одном положении контура – когда плоскость контура перпендикулярна линиям магнитной индукции. Таких положений два, и в одном из них равновесие устойчиво (при малом отклонении момент сил возвращает контур в это положение), а в другом – неустойчиво. Поэтому движение контура – это колебания вокруг устойчивого положения равновесия (при наличии потерь механической энергии – затухающие).

Решение задачи: Сопротивление стороны квадрата $R=\rho\dfrac{a}{S}$, тогда сопротивление участка AC равно $R\sqrt{2}$, а участка ABC – $2R$. Примем, что потенциал A выше потенциала D. Направления токов показаны на рисунке. Величины сил тока обозначим следующим образом: $I_{AD}\equiv I_1$, $I_{AC}\equiv I_2$, $I_{ABC}\equiv I_3$ и $I_{CD}\equiv I_4$. Ясно, что $I_1=\dfrac{U}{R}$, $I_4=I_2+I_3=\dfrac{U}{R+2R/(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{3+\sqrt{2}}\dfrac{U}{R}$.



Далее находим, что $I_2=\dfrac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\dfrac{U}{R}$ и $I_3=\dfrac{1}{3+\sqrt{2}}\dfrac{U}{R}$. Силы Ампера, действующие на участки AB и CD, равны нулю. Силы Ампера, действующие на остальные участки, направлены «на наблюдателя» от плоскости контура. Величины этих сил $F_1=aBI_1=\dfrac{aBU}{R}=\dfrac{BUS}{\rho}$, $F_2=a\sqrt{2}\,BI_2\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\dfrac{BUS}{\rho}$, $F_3=a\,B\,I_3=\dfrac{1}{3+\sqrt{2}}\dfrac{BUS}{\rho}$. Суммарная сила

$$F=F_1+F_2+F_3=\frac{4+2\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\frac{BUS}{\rho}\approx 1{,}9\,\text{Н}.$$

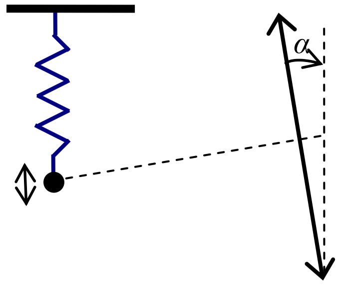
Точками приложения сил F_1 и F_3 можно считать середины участков AD и BC, поэтому они имеют одинаковые плечи по отношению к оси AC, равные $l=\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$, а направления создаваемого ими вращения противоположные. Плечо силы F_2 равно нулю. Таким образом, момент сил $M=\dfrac{a}{2\sqrt{2}}(F_1-F_3)=a\,B\,I_3=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2(3+\sqrt{2})}\dfrac{BUSa}{\rho}\approx 0{,}33\,\text{Н·м}$. Этот момент создает направление вращения, при котором точка D движется «на наблюдателя». При изменении полярности напряжения величины силы и моменты остаются прежними, а направления изменяются на противоположные.

ОТВЕТ: $F=\dfrac{4+2\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\dfrac{BUS}{\rho}\approx 1{,}9\,\text{Н}$, направление силы при $\varphi_A>\varphi_D$ «на наблюдателя» от плоскости контура, $M=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2(3+\sqrt{2})}\dfrac{BUSa}{\rho}\approx 0{,}33\,\text{Н·м}$, создает направление вращения, при котором точка D движется «на наблюдателя». При изменении полярности напряжения величины силы и моменты остаются прежними, а направления изменяются на противоположные.

Задание 4.

Вопрос: Нить лампочки накаливания длиной l размещена вдоль главной оптической оси тонкой собирающей линзы с $|F| >> l$. Изображение нити имеет 5-кратное увеличение. Каким станет увеличение, если нить повернуть на 90°, не меняя ее положения?

Задача: Маленький груз совершает малые вертикальные гармонические колебания на пружине. Амплитуда колебаний равна x_m. За этими колебаниями наблюдают через тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием $F >> x_m$. Линза отклонена от вертикали на «не слишком большой» угол α, а ее главная оптическая ось проходит через положение равновесия груза. Найти амплитуду колебаний изображения груза, если расстояние от точки равновесия груза до линзы $a = \frac{3}{2}F$.



Ответ на вопрос: В первом случае для «дальнего» края нити, находящегося на расстоянии a от линзы, изображение находится на расстоянии b от линзы, которое можно найти по формуле тонкой линзы: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \Rightarrow b = \frac{aF}{a-F}$. Аналогично для другого края $\frac{1}{a-l} + \frac{1}{b+l'} = \frac{1}{F} \Rightarrow b + l' = \frac{(a = l)F}{a-l-F}$. Следовательно, размер изображения $l' = \frac{F^2}{(a-F)(a-l-F)} l$. С учетом малости l продольное увеличение $\Gamma_\parallel = \frac{F^2}{(F-a)^2}$. После поворота соотношение поперечных размеров изображения и предмета равно соотношению расстояний до линзы: $\Gamma_\perp = \left|\frac{b}{a}\right| = \frac{F}{|F-a|} = \sqrt{\Gamma_\parallel} = \sqrt{5}$.

<u>Примечание</u>: допустим ответ $\pm\sqrt{5}$, имея в виду определение увеличения с учетом знака (то есть ориентации изображения).

Решение задачи: Колебания груза можно представить как наложение колебаний вдоль оптической оси амплитудой $x_m \sin\alpha$ и перпендикулярно оси с амплитудой $x_m \cos\alpha$. В соответствии с результатами ответа на вопрос, продольное увеличение $\Gamma_\parallel = \frac{F^2}{(F-a)^2} = 4$, а поперечное увеличение $\Gamma_\perp = \frac{F}{|F-a|} = 2$. Поэтому амплитуда колебаний изображения $\tilde{x}_m = \sqrt{(2x_m \cos\alpha)^2 + (4x_m \sin\alpha)^2} = 2x_m\sqrt{1+3\sin^2\alpha}$.

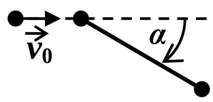
ОТВЕТ: $\tilde{x}_m = 2x_m\sqrt{1+3\sin^2\alpha}$.

БИЛЕТ № 06 (УФА)

Задание 1.

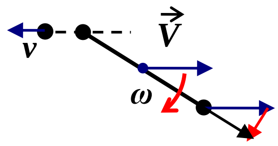
Вопрос: Гантель, состоящая из двух маленьких шариков массы m и легкого жесткого L, стержня длины, движется в плоскости таким образом, что скорость ее центра масс равна V, а угловая скорость ω. Чему равна ее кинетическая энергия?

Задача: Гантель, состоящая из двух массивных маленьких шариков и легкого жесткого стержня длины L, покоилась на гладкой горизонтальной поверхности. В один из ее шариков врезается третий (такой же), скорость которого $\vec{v}_0$ направлена под углом 30° к стержню. Происходит лобовое абсолютно упругое соударение. Найти угловую скорость вращения гантели после удара.



Ответ на вопрос: Кинетическая энергия гантели в этом случае есть сумма энергий поступательного ($\frac{2mV^2}{2} = mV^2$) и вращательного ($2\frac{mV_{вр}^2}{2} = m\left(\omega\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{m\omega^2L^2}{4}$) движений, то есть $E_K = m\left(V^2 + \frac{\omega^2L^2}{4}\right)$.

Решение задачи: Поскольку здесь «линия удара» (линия действия сил взаимодействия шариков во время удара) не проходит через центр масс гантели, то после соударения она начнет вращаться. Запишем закон сохранения импульса в проекции на направление начального движения $mv_0 = 2mV - mv$ (где m – масса одного шарика). Значит, $v = 2V - v_0$. Рассмотрим движение гантели после удара как движение центра масс с этой



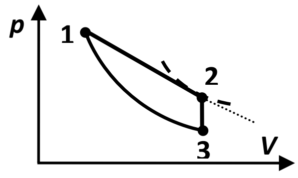
скоростью V и вращение вокруг него с угловой скоростью ω. Сила, действующая на «второй» шарик гантели (на тот, по которому не наносит удар налетающий шарик) – это сила упругости жесткого стержня, направленная вдоль стержня. Поэтому его скорость сразу после «мгновенного» удара направлена вдоль стержня и при этом является суммой скорости центра масс и скорости вращения $\vec{v}_2 = \vec{V} + \vec{v}_{вр}$, которая перпендикулярна радиусу вращения и по величине равна $v_{вр} = \omega r_2$. Расстояние от центра масс гантели до второго шарика $r_2 = \frac{L}{2}$. При этом из векторного треугольника скоростей видно, что $\omega r_2 = \omega\frac{1}{2}L = V\sin(\alpha) \Rightarrow \omega = \frac{2V}{L}\sin(\alpha) = \frac{V}{L}$. Следовательно, закон сохранения энергии записывается в виде $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + m\left(V^2 + \frac{\omega^2L^2}{4}\right) = \frac{m}{2}\left[(2V - v_0)^2 + \frac{5}{2}V^2\right]$. Для скорости центра масс гантели получается уравнение $13V^2 - 8Vv_0 = 0$, ненулевой корень которого $V = \frac{8}{13}v_0$. Таким образом, $\omega = \frac{8}{13}\frac{v_0}{L}$.

ОТВЕТ: $\omega = \frac{8}{13}\frac{v_0}{L}$.

Задание 2.

Вопрос: Точка К – это точка на $p - V$-диаграмме, описывающая состояние постоянного количества одноатомного идеального газа. Угол наклона изотермы в этой точке к оси V равен α. Каков угол наклона адиабаты в этой же точке к оси V? Ответ обосновать.

Задача: На рисунке показана диаграмма циклического процесса над постоянным количеством гелия, являющимся рабочим телом тепловой машины Цикл состоит из изохоры, адиабаты и процесса с линейной зависимостью давления от объема, в котором объем увеличивается в 2,5 раза. Пунктирная



кривая – участок адиабаты, касающейся диаграммы этого процесса в точке 2. Найти КПД цикла. Уравнение адиабаты для одноатомного идеального газа имеет вид $pV^{5/3} = const$.

Ответ на вопрос: В изотермическом процессе $pV = const$, поэтому $\Delta(pV) = p\Delta V + V\Delta p = 0$, откуда для угла наклона изотермы получим $\frac{\Delta p}{\Delta V}|_K = -\frac{p_K}{V_K} = -\text{tg}(\alpha)$. В адиабатическом процессе $\delta Q = p\Delta V + \frac{3}{2}\Delta(pV) = \frac{5}{2}p\Delta V + \frac{3}{2}V\Delta p = 0$, поэтому угол наклона адиабаты β в точке К определяется из соотношения $\text{tg}(\beta) = -\frac{\Delta p}{\Delta V}|_K = \frac{5}{3}\frac{p_K}{V_K} = \frac{5}{3}\text{tg}(\alpha)$. Значит, $\beta = \text{arctg}\left(\frac{5}{3}\text{tg}(\alpha)\right)$.

Решение задачи: Как видно из диаграммы, на всем участке 1-2 гелий получает тепло, а при изохорном охлаждении – отдает. Поэтому $Q_H = Q_{12}$, а $Q_X = -Q_{23}$. Рассмотрим процесс 1-2. По условию, $V_2 = \frac{5}{2}V_1$. Кроме того, в соответствии с ответом на вопрос:

$$\text{tg}(\beta) = \frac{5}{3}\frac{p_2}{V_2} = \frac{p_1 - p_2}{V_2 - V_1} \Rightarrow \frac{3(p_1 - p_2)}{p_2} = \frac{5(V_2 - V_1)}{V_2} = 3 \Rightarrow p_2 = \frac{p_1}{2}.$$

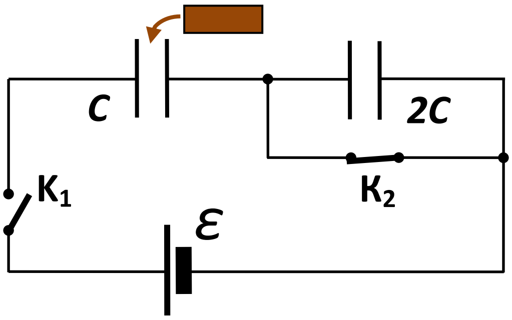
Вычислим $Q_H = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) + \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{3}{2}p_1V_1$. В соответствии с приведенным в условии уравнением адиабаты $p_3V_2^{5/3} = p_1V_1^{5/3} \Rightarrow p_3 = \left(\frac{2}{5}\right)^{5/3}p_1$, следовательно, $Q_X = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_3V_3) = \frac{15}{8}\left[1 - \frac{4}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{2/3}\right]p_1V_1$. Таким образом, КПД цикла $\eta = 1 - \frac{Q_X}{Q_H} = \left(\frac{2}{5}\right)^{2/3} - \frac{1}{4} \approx 0{,}29$.

ОТВЕТ: $\eta = \left(\frac{2}{5}\right)^{2/3} - \frac{1}{4} \approx 0{,}29$.

Задание 3.

Вопрос: Плоский воздушный конденсатор заряжен и отключен от источника. В него частично вставили диэлектрическую пластинку, толщина которой чуть меньше расстояния между пластинами конденсатора, и отпустили ее, не подталкивая. Что произойдет с пластиной после этого? Трение между пластинкой и пластинами конденсатора очень мало.

Задача: В схеме, показанной на рисунке, конденсаторы изначально разряжены. После замыкания ключа K_1 заряд конденсатора с емкостью C стал равен $q = 5$ мкКл. Затем ключ K_2 разомкнули, а после этого конденсатор C полностью заполнили диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 3$. Какой заряд после этого будет на конденсаторе емкостью $2C$?



Ответ на вопрос: Так как конденсатор отключен от источника, то его заряд сохраняется. При этом ему энергетически выгодно увеличивать свою емкость (энергия $E=\frac{q^2}{2C}$), то есть втягивать в себя пластину. Поэтому пластина будет втягиваться в конденсатор и набирать скорость, проскочит по инерции положение равновесия и продолжит движение далее, но – после того, как она достигнет другого края конденсатора – уже с торможением (теперь емкость убывает, а энергия растет). При наличии потерь энергии (трение, переполяризация диэлектрика, излучение) возникнут медленно затухающие колебания пластины.

Решение задачи: После замыкания ключа $К_1$ конденсатор с емкостью C заряжается до напряжения, равного ЭДС источника, то есть $q=C\mathcal{E}$. После размыкания ключа $К_2$ баланс напряжений не нарушается – напряжение на конденсаторе с емкостью $2C$ (и его заряд) остается равным нулю. В результате заполнения первого конденсатора диэлектриком его емкость увеличивается до $C'=\varepsilon C$, и батарея конденсаторов дозаряжается. Обозначим Δq заряд, перемещенный источником в процессе дозарядки. Тогда новый заряд конденсатора с емкостью εC будет равен $q+\Delta q$, а заряд конденсатора с емкостью $2C$ станет Δq. Условие баланса напряжений: $\frac{q+\Delta q}{\varepsilon C}+\frac{\Delta q}{2C}=\frac{q}{C}\Rightarrow \Delta q=\frac{2(\varepsilon-1)}{\varepsilon+2}q=4$ мкКл.

ОТВЕТ: $\Delta q=\frac{2(\varepsilon-1)}{\varepsilon+2}q=4$ мкКл.

Задание 4.

Вопрос: Пучок параллельных световых лучей падает на линзу с оптической силой $D_1=+2$ дптр. На каком расстоянии за ней нужно поставить соосно линзу с оптической силой $D_2=-5$ дптр, чтобы из второй линзы лучи пучка вышли параллельно?

Задача: Две тонкие линзы, одна из которых собирающая, а другая – рассеивающая, расположены на общей оптической оси на расстоянии L друг от друга. На той же оси на расстоянии $3L$ от ближней из них расположен точечный источник света. Если ближе к источнику размещена собирающая линза, то изображение источника находится на расстоянии L за рассеивающей линзой. Если, не перемещая источник, переставить линзы, то изображение будет находиться на расстоянии $7L/3$ за собирающей линзой. Найти фокусные расстояния обеих линз.

Ответ на вопрос: После прохождения первой (собирающей) линзы пучок станет сходящимся – лучи будут направлены в точку, лежащей в фокальной плоскости первой линзы. Эта точка будет играть роль точечного источника для второй (рассеивающей) линзы. Пучок выходящей из второй линзы лучей будет параллельным, если эта точка будет находиться в фокальной плоскости и второй линзы тоже. С учетом того, что фокусное расстояние второй линзы по модулю меньше, чем у первой, то расстояние между линзами должно равняться разности величин фокусного расстояния линз: $L=F_1-|F_2|=\frac{1}{D_1}-\frac{1}{|D_2|}=30$ см.

Решение задачи: В качестве первого шага получим общее соотношение, связывающее параметры системы из двух тонких линз, имеющих общую оптическую ось, с расстояниями до источника и изображения. Пусть F_1 и F_2 – фокусные расстояния линз, L – расстояние между ними, $a_{1,2}$ – расстояния до источников от каждой из линз, $b_{1,2}$ – расстояния до изображений. Расстояние от источника до системы есть расстояние до 1-ой линзы.

Изображение, создаваемое 1-ой линзой, находится от нее на расстоянии, определяемом формулой линзы: $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{F_1}\Rightarrow b_1=\frac{a_1F_1}{a_1-F_1}$. Это изображение является источником для второй линзы: $a_2=L-b_1=L-\frac{a_1F_1}{a_1-F_1}=\frac{La_1-F_1(L+a_1)}{a_1-F_1}$. Вторично применяя формулу линзы, получим:

$$b_2=\frac{a_2F_2}{a_2-F_2}=\frac{F_2\left[La_1-F_1(L+a_1)\right]}{La_1-F_1(L+a_1)-F_2a_1+F_1F_2}\Rightarrow .$$

$$\Rightarrow (L+a_1+b_2)F_1F_2-(L+a_1)b_2F_1-(L+b_2)a_1F_2+La_1b_2=0$$

Теперь запишем это соотношение для двух ситуаций, описанных в условии задачи, обозначив фокусное расстояние собирающей линзы F_1 (т.е. считаем $F_1>0$ и $F_2<0$):

$$\begin{cases} 5F_1F_2-4LF_1-6LF_2+3L^2=0 \\ \frac{19}{3}F_1F_2-10LF_1-\frac{28}{3}LF_2+7L^2=0 \end{cases}.$$

Получена система двух уравнений относительно двух неизвестных F_1 и F_2. Она имеет два решения: $F_1=L$, $F_2=-L$ и $F_1=21L/37$, $F_2=3L/13$. Поскольку условию задачи удовлетворяет только первое из них, оно и дает правильный ответ.

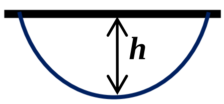
ОТВЕТ: $F_1=L$, $F_2=-L$.

БИЛЕТ № 07 (САРАТОВ)

Задание 1.

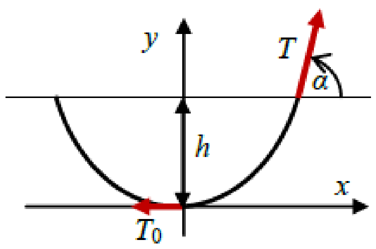
Вопрос: Массивная веревка висит неподвижно в поле тяжести. Рассмотрим силы натяжения веревки, приложенные к концам ее выделенного участка. Чему равна разность горизонтальных и вертикальных проекций этих сил?

Задача: Однородная гибкая веревка длины $L=1$ м и массой $m=320$ г подвешена к горизонтальному потолку таким образом, что глубина «провиса» веревки равна $h=25$ см. Найти минимальную и максимальную величины силы натяжения веревки. Ускорение свободного падения равно $g\approx 10$ м/с^2.



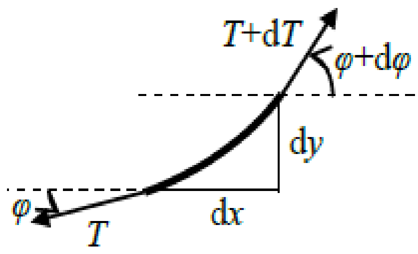
Ответ на вопрос: На выделенный участок веревки действуют только силы приложенные к его концам силы натяжения и сила тяжести, которая направлена вертикально. При этом сумма сил, приложенных к покоящемуся участку, равна нулю. Поэтому разность величин горизонтальных проекций этих сил равна нулю (горизонтальные проекции одинаковы и направлены в разные стороны), а разность величин вертикальных проекций равна весу этого участка.

Решение задачи: Пусть α - угол наклона веревки к горизонтали в точке подвеса. Вес веревки уравновешивается вертикальными составляющими сил натяжения в точках подвеса, то есть $2T\sin\alpha=mg$. Рассмотрев условие равновесия горизонтальных сил, приложенных к «правой» половине веревки, найдем, что $T\cos\alpha=T_0$. Исключая угол α, получим выражение $T=\sqrt{T_0^2+\frac{m^2g^2}{4}}$. Теперь рассмотрим равновесие



малого элемента веревки длиной dl, наклоненного под углом φ к горизонту, в проекциях на оси x и y:

$$\begin{cases} (T+dT)(\cos\varphi - \sin\varphi d\varphi) - T\cos\varphi = 0 \\ (T+dT)(\sin\varphi + \cos\varphi d\varphi) - T\sin\varphi - mg\dfrac{dl}{L} = 0 \end{cases}.$$



После сокращения подобных:

$$\left.\begin{cases} dT\cos\varphi - T\sin\varphi d\varphi = 0 \\ dT\sin\varphi + T\cos\varphi d\varphi = mg\dfrac{dl}{L} \end{cases}\right\} \Rightarrow dT = \frac{mg}{L}dl\sin\varphi = \frac{mg}{L}dy.$$

Суммируя малые приращения правой и левой части этого равенства, найдем, что $T - T_0 = \dfrac{h}{L}mg$. Подставив сюда соотношение для T, получаем уравнение для T_0:

$$T_0^2 + \frac{m^2g^2}{4} = \left(T_0 + \frac{h}{L}mg\right)^2 \Rightarrow T_0 = \frac{mg}{8}\left(\frac{L}{h} - 4\frac{h}{L}\right) = 1{,}2\,\text{Н}.$$

Ясно, что это минимальная величина силы натяжения. Максимальная величина – это $T = \dfrac{mg}{8}\left(\dfrac{L}{h} + 4\dfrac{h}{L}\right) = 2\,\text{Н}$.

ОТВЕТ: Минимальная величина силы натяжения у веревки – в нижней точке $T_0 = \dfrac{mg}{8}\left(\dfrac{L}{h} - 4\dfrac{h}{L}\right) = 1{,}2\,\text{Н}$, а максимальная – в точках подвеса $T = \dfrac{mg}{8}\left(\dfrac{L}{h} + 4\dfrac{h}{L}\right) = 2\,\text{Н}$.

Задание 2.

Вопрос: При сжатии одного моля одноатомного идеального газа зависимость его абсолютной температуры от произведенной над ним работы оказалась линейной: $T = T_0 + a\dfrac{A}{R}$ (здесь R – универсальная газовая постоянная). При каких значениях a теплоемкость газа в этом процессе отрицательна?

Задача: Вертикальный цилиндрический теплоизолирующий гладкий сосуд разделен на две части легким горизонтальным поршнем. В нижней части сосуда находится гелий с температурой $t_1 = 15°C$, а верхняя часть вакуумирована, и в ней находится невесомая вертикальная пружина в недеформированном состоянии. Поршень удерживается в этом положении. Затем его отпускают. После установления равновесия оказалось, что объем, занятый гелием, увеличился на 50%. Найти новую температуру гелия.

Ответ на вопрос: Согласно I Началу термодинамики, изменение внутренней энергии газа $\Delta U = Q + A = \dfrac{3}{2}R\Delta T$ (здесь Q – количество теплоты, подведенной к газу). По условию $A = \dfrac{R}{a}(T - T_0) = \dfrac{R}{a}\Delta T$. Следовательно, $Q = \left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{a}\right)R\Delta T$. Из этого соотношения находим теплоемкость $c \equiv \dfrac{Q}{\Delta T} = \left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{a}\right)R$. Таким образом, $c < 0$ при $0 < a < \dfrac{2}{3}$.

Решение задачи: Пусть количество молей гелия в сосуде равно ν, а его начальный объем равен V. Тогда конечный объем равен $\dfrac{3V}{2}$, и деформация пружины $x = \dfrac{\Delta V}{S} = \dfrac{V}{2S}$ (S –

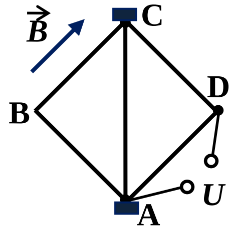
сечение сосуда). В конечном состоянии давление гелия уравновешивается силой упругости пружины $p_2 S = kx \Rightarrow \dfrac{2\nu RT_2}{3V} S = k\dfrac{V}{2S} \Rightarrow k = \dfrac{4\nu RT_2}{3V^2} S^2$. В процессе сжатия газом пружины внутренняя энергия газа переходит в энергию деформации пружины: $-\Delta U = \dfrac{3}{2}\nu R(T_1 - T_2) = \dfrac{kx^2}{2}$. Подставив сюда полученные выражения для k и x, получим: $\dfrac{3}{2}\nu R(T_1 - T_2) = \dfrac{2\nu RT_2}{3V^2} S^2 \dfrac{V^2}{4S^2} \Rightarrow 9(T_1 - T_2) = T_2$. Следовательно, $T_2 = 0{,}9T_1 \Rightarrow t_2 \approx -14°C$.

ОТВЕТ: $T_2 = 0{,}9T_1 \Rightarrow t_2 \approx -14°C$.

Задание 3.

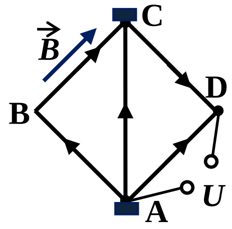
Вопрос: Прямолинейный длинный провод с током и небольшое кольцо с током расположены в одной плоскости. В каком случае они притягиваются за счет магнитного взаимодействия, а в каком – отталкиваются? Ответ обосновать.

Задача: Из медной проволоки изготовлен квадратный контур с перемычкой. Контур подключен к источнику постоянного напряжения $U = 1{,}5$ В между точками A и D и помещен в магнитное поле с индукцией $B = 4$ мТл, причем силовые линии лежат в плоскости контура и параллельны двум его сторонам. Найдите величину и направление силы, действующей на контур со стороны магнитного поля, а также величину и направление момента сил, поворачивающего контур вокруг оси AC. Удельное сопротивление проволоки $\rho = 0{,}018$ мкОм·м, площадь сечения проволоки $S = 3{,}6$ мм^2, длина стороны квадрата $a = 1$ м.



Ответ на вопрос: В соответствии с законом Ампера, сонаправленные токи притягиваются за счет магнитного взаимодействия, а противонаправленные – отталкиваются. Кроме того, сила магнитного взаимодействия токов убывает с увеличением расстояния. Поэтому результирующая сила, с которой прямолинейный ток действует на ток в кольце, будет силой притяжения, если в ближней проводу точке кольца ток сонаправлен с током в проводе, и будет силой отталкивания, если ток в этой точке противонаправлен току в проводе.

Решение задачи: Сопротивление стороны квадрата $R = \rho\dfrac{a}{S}$, тогда сопротивление участка AC равно $R\sqrt{2}$, а участка ABC – $2R$. Примем, что потенциал A выше потенциала D. Направления токов показаны на рисунке. Величины сил тока обозначим следующим образом: $I_{AD} \equiv I_1$, $I_{AC} \equiv I_2$, $I_{ABC} \equiv I_3$ и $I_{CD} \equiv I_4$. Ясно, что $I_1 = \dfrac{U}{R}$, $I_4 = I_2 + I_3 = \dfrac{U}{R + 2R/(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{3+\sqrt{2}}\dfrac{U}{R}$.



Далее находим, что $I_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\dfrac{U}{R}$ и $I_3 = \dfrac{1}{3+\sqrt{2}}\dfrac{U}{R}$. Силы Ампера, действующие на участки BC и AD, равны нулю. Определим силы Ампера, действующие на остальные участки. Сила, действующая на участок AB равна $F_3 = aBI_3 = \dfrac{1}{3+\sqrt{2}}\dfrac{aBU}{R} = \dfrac{1}{3+\sqrt{2}}\dfrac{BUS}{\rho}$ и направлена «от наблюдателя» перпендикулярно плоскости контура. Для участка AC

$F_2 = a\sqrt{2}\,BI_2\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\frac{BUS}{\rho}$ при том же направлении, а для CD $F_4 = a\,B\,I_4 = \frac{\sqrt{2}+1}{3+\sqrt{2}}\frac{BUS}{\rho}$ с направлением «на наблюдателя». Суммарная сила $F = F_3 + F_2 - F_4 = 0$!

Точками приложения сил F_4 и F_3 можно считать середины участков CD и AB, поэтому они имеют одинаковые плечи по отношению к оси AC, равные $l = \frac{a}{2\sqrt{2}}$, к тому же направления создаваемого вращения одинаковы. Плечо силы F_2 равно нулю. Таким образом, момент сил $M = \frac{a}{2\sqrt{2}}(F_4 + F_3) = \frac{\sqrt{2}+1}{2(3+\sqrt{2})}\frac{BUSa}{\rho} \approx 0{,}33$ Н·м. Этот момент создает направление вращения, при котором точка D движется «на наблюдателя». При изменении полярности напряжения сила остается равной нулю, величина момента остается прежней, а направление изменяется на противоположное.

ОТВЕТ: $F = 0$ Н, при $\varphi_A > \varphi_D$ величина момента сил $M = \frac{\sqrt{2}+1}{2(3+\sqrt{2})}\frac{BUSa}{\rho} \approx 0{,}33$ Н·м, и он создает направление вращения, при котором точка D движется «на наблюдателя». При изменении полярности напряжения величина момента остается прежней, а направление изменяется на противоположное.

Задание 4.

Вопрос: В каких случаях тонкая линза формирует уменьшенные изображения предметов?

Задача: Небольшой светящийся объект равномерно движется вдоль оси тонкой линзы с фокусным расстоянием $|F| = 30$ см. В некоторый момент времени величина скорости движения объекта относительно его мнимого уменьшенного изображения оказывается на $n = 12{,}5\%$ больше, чем величина его скорости относительно линзы. Найдите расстояние между объектом и линзой в этот момент времени.

Ответ на вопрос: Увеличение изображения для тонкой линзы определяется соотношением расстояний от линзы до изображения и предмета: $\Gamma_\perp = \left|\frac{b}{a}\right|$. Согласно формуле тонкой линзы, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{F}{a-F} \Rightarrow \Gamma_\perp = \frac{|F|}{|a-F|}$. Следовательно, изображение будет уменьшенным ($\Gamma_\perp < 1$), если $F > 0$ (собирающая линза) и $a > 2F$, а также при $F < 0$ (рассеивающая линза) и любом реальном источнике.

Решение задачи: Для «малого» предмета, находящегося на расстоянии a от линзы, изображение находится на расстоянии b, которое можно найти по формуле тонкой линзы: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \Rightarrow b = \frac{aF}{a-F}$. Аналогично для расстояния $a - v\Delta t$ найдем $\frac{1}{a - v\Delta t} + \frac{1}{b + v'\Delta t} = \frac{1}{F} \Rightarrow b + v'\Delta t = \frac{(a = v\Delta t)F}{a - v\Delta t - F}$. Следовательно, $v' = \frac{F^2}{(a-F)^2}v$. Мнимые уменьшенные изображения создают рассеивающие линзы ($F = -|F|$), то есть $v' = \frac{|F|^2}{(a+|F|)^2}v$. При этом объект «догоняет» изображение, и скорость движения объекта относительно его мнимого уменьшенного изображения $u = v - v' = \dfrac{a(2|F|+a)}{(a+|F|)^2}v$. По условию $\dfrac{u}{v'} = \dfrac{a(2|F|+a)}{|F|^2} = 1+n$, поэтому $\left(\dfrac{a}{|F|}\right)^2 + 2\dfrac{a}{|F|} - 1 - n = 0 \Rightarrow a = |F|(-1+\sqrt{2+n})$ (выбран положительный корень). Итак, $a = |F|\left(\sqrt{\dfrac{17}{8}} - 1\right) \approx 13{,}7$ см.

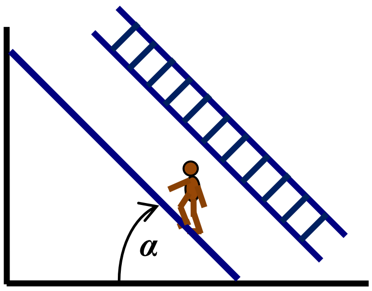
ОТВЕТ: $a = |F|(-1+\sqrt{2+n}) \approx 13{,}7$ см.

БИЛЕТ № 08 (КЕМЕРОВО)

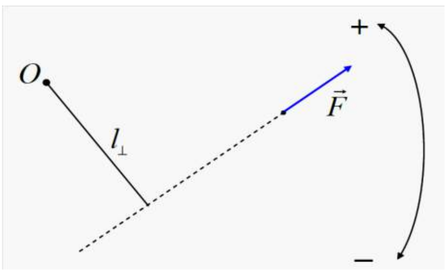
Задание 1.

Вопрос: Сформулируйте условия равновесия твердого тела. Что такое «момент силы»?

Задача: У лестницы 11 одинаковых ступеней, распределенных равномерно: расстояние от нижнего конца до нижней ступени, расстояния между соседними ступенями и расстояние от верхней ступени до верхнего конца одинаковы. Ее поставили в угол, образованный стеной и полом. Коэффициент трения между стеной и лестницей $\mu = 0{,}25$, а коэффициент трения между лестницей и полом $2\mu = 0{,}5$. Человек с массой, равной удвоенной массе лестницы, поднимается по ступеням. Когда он перенес весь свой вес на девятую ступень, лестница, немного постояв, начала скользить. Чему равнялся угол между лестницей и полом?



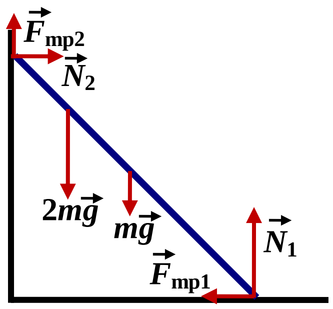
Ответ на вопрос: Необходимыми условиями нахождения твердого тела в равновесии являются: (1) равенство нулю векторной сумм внешних сил, приложенных к телу; (2) равенство нулю алгебраической суммы моментов внешних сил, приложенных к телу. Во втором условии используются определения:



Плечо силы $l_\perp$ – расстояние от оси вращения до линии действия силы.

Момент силы – произведение величины силы на ее плечо, взятое со знаком + (-), если сила вращает тело вокруг оси в положительном (отрицательном) направлении: $M = \pm|\vec{F}|\cdot l_\perp$

Решение задачи: Искомый угол α - в точности «критический» угол наклона, при котором силы трения, удерживающие лестницу от проскальзывания, еще обеспечивают равновесие (лестница «немного постояла»), но уже достигли своих максимальных значений. Пусть масса лестницы равна m, а масса человека – $2m$. Укажем на рисунке силы, действующие на лестницу в «критическом» положении (человек на 9-й ступени). Запишем условие равновесия сил в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси и найдем $N_{1,2}$:



$$\begin{cases} N_1 + \mu N_2 = 3mg \\ N_2 - 2\mu N_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = \dfrac{3mg}{1+2\mu^2} \\ N_2 = \dfrac{6\mu mg}{1+2\mu^2} \end{cases}$$

Теперь запишем условие моментов относительно нижнего конца лестницы (учитывая, что точка приложения веса человека находится на расстоянии $\frac{3L}{4}$ от него, где L – длина лестницы): $mg\frac{L}{2}\cos(\alpha)+2mg\frac{3L}{4}\cos(\alpha)-N_2L[\sin(\alpha)+\mu\cos(\alpha)]=0$. Из этого уравнения находим, что $\mathrm{tg}(\alpha)+\mu=\frac{2mg}{N_2}\Rightarrow\mathrm{tg}(\alpha)=\frac{1-\mu^2}{3\mu}=\frac{5}{4}$. Итак, $\alpha=\mathrm{arctg}\left(\frac{1-\mu^2}{3\mu}\right)=\mathrm{arctg}\left(\frac{5}{4}\right)$.

ОТВЕТ: $\alpha=\mathrm{arctg}\left(\frac{1-\mu^2}{3\mu}\right)=\mathrm{arctg}\left(\frac{5}{4}\right)$.

Задание 2.

Вопрос: При расширении одного моля одноатомного идеального газа зависимость его абсолютной температуры от произведенной им работы оказалась линейной: $T=T_0-b\frac{A}{R}$ (здесь R – универсальная газовая постоянная). При каких значениях b теплоемкость газа в этом процессе отрицательна?

Задача: Вертикальный цилиндрический теплоизолирующий гладкий сосуд разделен на две части массивным горизонтальным поршнем. В нижней части сосуда находится гелий под давлением $p_1=100$ кПа, а верхняя часть вакуумирована. Поршень удерживается в этом положении. Затем его отпускают. После установления равновесия оказалось, что объем, занятый гелием, увеличился на 40%. Найти давление гелия в этом состоянии равновесия.

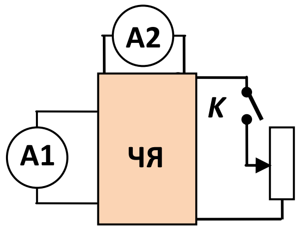
Ответ на вопрос: Согласно I Началу термодинамики, изменение внутренней энергии газа $\Delta U=Q-A=\frac{3}{2}R\Delta T$ (здесь Q – количество теплоты, подведенной к газу). По условию $A=-\frac{R}{b}(T-T_0)=-\frac{R}{b}\Delta T$. Следовательно, $Q=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{b}\right)R\Delta T$. Из этого соотношения находим теплоемкость $c\equiv\frac{Q}{\Delta T}=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{b}\right)R$. Таким образом, $c<0$ при $0<b<\frac{2}{3}$.

Решение задачи: Пусть количество молей гелия в сосуде равно ν, а его начальный объем равен V. Тогда конечный объем равен $\frac{7V}{5}$, и высота подъема поршня $x=\frac{\Delta V}{S}=\frac{2V}{5S}$ (S – сечение сосуда). В конечном состоянии давление гелия уравновешивается весом поршня $p_2S=mg\Rightarrow\frac{5\nu RT_2}{7V}S=mg$. В процессе сжатия газом пружины внутренняя энергия газа переходит в энергию поршня в поле тяжести: $-\Delta U=\frac{3}{2}\nu R(T_1-T_2)=mgx$. Подставив сюда полученные выражения для mg и x, получим: $\frac{3}{2}\nu R(T_1-T_2)=\frac{5\nu RT_2}{7V}S\frac{2V}{5S}\Rightarrow21(T_1-T_2)=4T_2$. Следовательно, $T_2=\frac{21}{25}T_1$. Согласно объединенному газовому закону, отношение давлений $\frac{p_2}{p_1}=\frac{T_2}{T_1}\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{5}$, и $p_2=\frac{3}{5}p_1=60$ кПа.

ОТВЕТ: $p_2 = \frac{3}{5} p_1 = 60$ кПа.

Задание 3.

Вопрос: 50 аккумуляторов с одинаковыми ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренними сопротивлениями r соединены последовательно в замкнутую цепь. Вольтметр подключен к участку, содержащему 20 аккумуляторов. Каковы его показания? Ответ объяснить.



Задача: В «Черном Ящике» находится схема, составленная из резисторов и источников постоянного тока. У «ЧЯ» есть шесть выводов. К двум парам выводов подключены амперметры, а к двум оставшимся – ветвь, содержащая ключ и реостат. При разомкнутом ключе показания амперметра А1 равны 1А, а амперметра А2 – 5А. После замыкания ключа А1 стал показывать силу тока 2А, а А2 – силу тока 4А. Движок реостата передвинули. После этого показания А2 стали равны 2,4 А. Какой ток при этом течет через А1?

Ответ на вопрос: Ток в такой замкнутой цепи $I = \frac{50\mathcal{E}}{50r} = \frac{\mathcal{E}}{r}$. Поэтому напряжение на каждом из аккумуляторов $U_1 = \mathcal{E} - Ir = 0$. Значит, равно нулю и напряжение на любом участке цепи, и показания вольтметра также должны быть нулевыми.

Решение задачи: Поскольку схема в «Черном Ящике» содержит только линейные элементы (резисторы и источники), то токи в ветвях являются решениями линейной системы уравнений, и поэтому являются линейными функциями ЭДС и обратных сопротивлений элементов схемы. При изменении сопротивления одной из ветвей (при неизменных значениях остальных параметров) токи во всех ветвях оказываются линейным функциями обратного сопротивления этой ветви, и поэтому между самими токами тоже должно быть линейное соотношении. Значит, существуют такие постоянные коэффициенты (обозначим их A и B), что при любом изменении сопротивления ветви с реостатом показания амперметров связаны соотношением $I_1 = A + B \cdot I_2$. Используя известные значения токов, находим:

$$\left\{\begin{aligned} 1\text{А} &= A + B \cdot 5\text{А} \\ 2\text{А} &= A + B \cdot 4\text{А} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} A &= 6\text{А} \\ B &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_1 = 6\text{А} - I_2.$$

Таким образом, при $I_2 = 2{,}4$ А через А1 течет ток $I_1 = 3{,}6$ А.

ОТВЕТ: $I_1 = 6\text{А} - I_2 = 3{,}6$ А.

Задание 4.

Вопрос: Пучок параллельных световых лучей падает на линзу с оптической силой $D_1 = -10$ дптр. На каком расстоянии за ней нужно поставить соосно линзу с оптической силой $D_2 = +2{,}5$ дптр, чтобы из второй линзы лучи пучка вышли параллельно?

Задача: Две тонкие линзы расположены на общей оптической оси на расстоянии L друг от друга. На той же оси на таком же расстоянии L от одной из них расположен точечный источник света. Если ближе к источнику размещена линза с большей оптической силой, то изображение источника находится на расстоянии $2L$ за дальней линзой. Если, не перемещая источник, переставить линзы, то изображение будет находиться на расстоянии $3L/2$ за дальней линзой. Найти фокусные расстояния обеих линз.

Ответ на вопрос: После прохождения первой (рассеивающей) линзы пучок станет расходящимся – продолжения лучей будут пересекаться в точке, лежащей в фокальной плоскости первой линзы. Эта точка будет играть роль точечного источника для второй (собирающей) линзы. Пучок выходящей из второй линзы лучей будет параллельным, если эта точка будет находиться в фокальной плоскости и второй линзы тоже. Поэтому расстояние между линзами должно равняться разности величин фокусного расстояния линз: $L = F_2 - |F_1| = \dfrac{1}{D_2} - \dfrac{1}{|D_1|} = 30$ см.

Решение задачи: В качестве первого шага получим общее соотношение, связывающее параметры системы из двух тонких линз, имеющих общую оптическую ось, с расстояниями до источника и изображения. Пусть F_1 и F_2 – фокусные расстояния линз, L – расстояние между ними, $a_{1,2}$ – расстояния до источников от каждой из линз, $b_{1,2}$ – расстояния до изображений. Расстояние от источника до системы есть расстояние до 1-ой линзы. Изображение, создаваемое 1-ой линзой, находится от нее на расстоянии, определяемом формулой линзы: $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{b_1} = \dfrac{1}{F_1} \Rightarrow b_1 = \dfrac{a_1 F_1}{a_1 - F_1}$. Это изображение является источником для второй линзы: $a_2 = L - b_1 = L - \dfrac{a_1 F_1}{a_1 - F_1} = \dfrac{La_1 - F_1(L + a_1)}{a_1 - F_1}$. Вторично применяя формулу линзы, получим:

$$b_2 = \frac{a_2 F_2}{a_2 - F_2} = \frac{F_2\left[L a_1 - F_1(L + a_1)\right]}{L a_1 - F_1(L + a_1) - F_2 a_1 + F_1 F_2} \Rightarrow .$$
$$\Rightarrow (L + a_1 + b_2) F_1 F_2 - (L + a_1) b_2 F_1 - (L + b_2) a_1 F_2 + L a_1 b_2 = 0$$

Теперь запишем это соотношение для двух ситуаций, описанных в условии задачи, обозначив фокусное расстояние линзы с большей оптической силой F_1 (т.е. считаем $F_1 < F_2$):

$$\begin{cases} 4F_1 F_2 - 4L F_1 - 3L F_2 + 2L^2 = 0 \\ \dfrac{7}{2} F_1 F_2 - \dfrac{5}{2} L F_1 - 3L F_2 + \dfrac{3}{2} L^2 = 0 \end{cases}.$$

Получена система двух уравнений относительно двух неизвестных F_1 и F_2. Она имеет два решения: $F_1 = L$, $F_2 = 2L$ и $F_1 = 3L/8$, $F_2 = L/3$. Поскольку условию задачи удовлетворяет только первое из них, оно и дает правильный ответ.

ОТВЕТ: $F_1 = L$, $F_2 = 2L$.