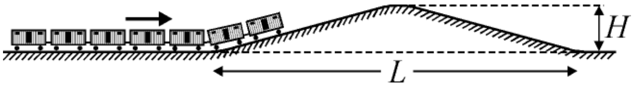
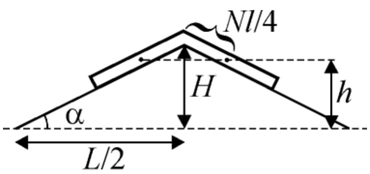
Задание для 9-х классов

1. Изучив законы механики, ученик решил проверить их экспериментально. Для этого он собрал дома модель игрушечной железной дороги. На прямолинейном участке дороги он поместил симметричную «горку» высотой $H = 0{,}5$ м и длиной основания $L = 2$ м (см. рисунок). Сцепив несколько одинаковых вагонов, он поставил образовавшийся поезд на горизонтальный участок дороги и толкнул его по направлению к горке со скоростью $v_0 = 3$ м/с. При каком минимальном числе вагонов $N_{\min}$ поезд преодолеет горку и скатится с противоположной стороны? Длина одного вагона $l = 10$ см. Силами сопротивления и длиной сцепки между вагонами можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.



Решение. Поезд преодолеет горку, если выполнено условие: $\frac{mv_0^2}{2} \geq mgh$, где m – масса поезда, h – высота центра тяжести поезда, достигаемая в момент, когда середина состава находится на вершине горки. Пренебрегая высотой вагона по сравнению с H и длиной вагона по сравнению с L, получаем, что (см. рисунок) $H - h = \frac{Nl}{4}\sin\alpha$. При этом $\mathrm{tg}\,\alpha = 2H/L$.



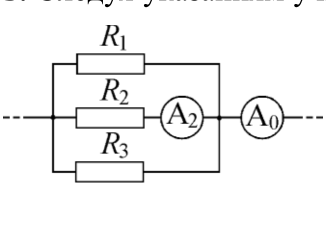
Объединяя записанные выражения, получаем, что $N \geq \frac{2}{l}\left(1 - \frac{v_0^2}{2gH}\right)\sqrt{L^2 + 4H^2}$.

Ответ: $N_{\min} = \left[\frac{2}{l}\left(1 - \frac{v_0^2}{2gH}\right)\sqrt{L^2 + 4H^2}\right] + 1 = 5$, где символом $[\cdots]$ обозначена целая часть числа.

2. В теплоизолированный сосуд с водой общей теплоемкостью $C = 1{,}5$ кДж/ºС, имеющий температуру $t_1 = 20$ ºС, поместили $m = 56$ г льда при температуре $t_2 = -8$ ºС. Какую температуру t_0 примет содержимое сосуда после установления теплового равновесия? Удельная теплоемкость воды $c_в = 4{,}2$ кДж/(кг·ºС), удельная теплоемкость льда $c_л = 2{,}1$ кДж/(кг·ºС), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг. Ответ приведите в градусах Цельсия, округлив до одного знака после запятой.

Решение. Количество теплоты, требующееся для нагревания льда до температуры плавления, $Q_1 = mc_л(0\,°\mathrm{C} - t_2) = 0{,}056 \cdot 2{,}1 \cdot 8 \approx 0{,}94$ кДж. Количество теплоты, требующееся для превращения льда в воду при температуре 0 ºС, $Q_2 = m\lambda = 0{,}056 \cdot 330 = 18{,}48$ кДж. Количество теплоты, которое может отдать сосуд с содержащейся в нем водой при охлаждении до 0 ºС, $Q_3 = C(t_1 - 0\,°\mathrm{C}) = 1{,}5 \cdot 20 = 30$ кДж. Сопоставление приведенных данных показывает, что весь лед растает и в сосуде с его содержимым установится положительная температура. Поэтому уравнение теплового баланса имеет вид: $C(t_1 - t_0) = Q_1 + Q_2 + mc_в(t_0 - 0\,°\mathrm{C})$. Отсюда $t_0 = \frac{Ct_1 - (Q_1 + Q_2)}{C + mc_в} = \frac{1{,}5 \cdot 20 - 19{,}42}{1{,}5 + 0{,}056 \cdot 4{,}2} \approx 6{,}1\,°\mathrm{C}$. **Ответ.** $t_0 = \frac{Ct_1 - m\left(c_л(0\,°\mathrm{C} - t_2) + \lambda\right)}{C + mc_в} \approx 6{,}1\,°\mathrm{C}$.

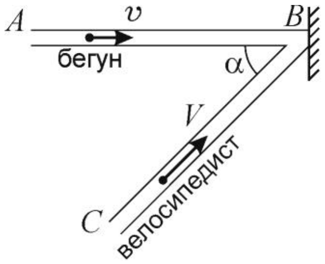
3. Следуя указаниям учителя, ученик собрал электрическую цепь, состоящую из трех резисторов и двух амперметров. При этом он заметил, что заводская маркировка на резисторе R_1 стерлась, и установить по ней значение сопротивления этого резистора невозможно. В то же время маркировка на резисторах R_2 и R_3 была четкой, благодаря чему ученик узнал, что $R_2 = 20$ Ом, а $R_3 = 15$ Ом.



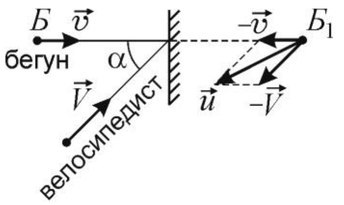
Подключив цепь к источнику постоянного тока (на рисунке не изображен), ученик обнаружил, что амперметр A_2 показывает силу тока I_2 = 0,3 А, а амперметр A_0 – силу тока I_0 = 1,5 А. Располагая этими данными и предположив, что сопротивления амперметров пренебрежимо малы, ученик смог рассчитать сопротивление резистора R_1. Какой ответ он получил? Ответ округлите до одного знака после запятой.

Решение. Обозначив через I_1, I_2 и I_3 силы токов, текущих через резисторы R_1, R_2 и R_3 соответственно, имеем следующую систему уравнений: $I_1R_1 = I_2R_2 = I_3R_3$, $I_1 + I_2 + I_3 = I_0$. Решая эту систему, находим, что $R_1 = \dfrac{I_2R_2R_3}{I_0R_3 - I_2(R_2 + R_3)}$. **Ответ.** $R_1 = \dfrac{I_2R_2R_3}{I_0R_3 - I_2(R_2 + R_3)} = 7{,}5$ Ом.

4. Две прямых дороги *AB* и *CB* пересекаются в точке *B* под углом $\alpha = 45°$. На перекрестке *B* установлено широкое плоское зеркало, расположенное перпендикулярно дороге *AB* так, что велосипедист, едущий к точке *B* по дороге *CB*, видит в зеркале бегуна, направляющегося к точке *B* по дороге *AB*. Какова скорость бегуна v, если скорость велосипедиста $V = 18$ км/час, а изображение бегуна приближается к велосипедисту с относительной скоростью $u = V\sqrt{2}$? Ответ приведите в км/час, округлив до одного знака после запятой.



Решение. Построение изображения $Б_1$ бегуна $Б$ представлено на рисунке. Относительно неподвижного наблюдателя это изображение движется по прямой $Б_1Б$ навстречу бегуну со скоростью, модуль которой равен v. Используя закон сложения скоростей, находим, что относительно велосипедиста изображение бегуна движется со скоростью $\vec{u} = -\vec{v} - \vec{V}$. По теореме косинусов имеем: $u^2 = v^2 + V^2 - 2vV\cos(\pi - \alpha)$. Учитывая, что $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$, получаем квадратное уравнение: $v^2 + 2vV\cos\alpha + V^2 - u^2 = 0$. Условию задачи удовлетворяет положительный корень $v = \sqrt{V^2\cos^2\alpha + u^2 - V^2} - V\cos\alpha$. Так как $u = V\sqrt{2}$, это выражение преобразуется к виду: $v = \left(\sqrt{\cos^2\alpha + 1} - \cos\alpha\right)V$. **Ответ:** $v = \left(\sqrt{\cos^2\alpha + 1} - \cos\alpha\right)V = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}V \approx 9{,}3$ км/час.



Критерии оценки

Задачи (каждая задача оценивается максимально в 25 баллов)

1. Задача вовсе не решалась – **0 баллов**.
2. Задача не решена, но сделан поясняющий рисунок (если требуется), частично сформулированы необходимые физические законы – **1 – 7 баллов**.
3. Задача не решена, но правильно сформулированы физические законы и правильно записаны основные уравнения, необходимые для решения задачи – **8 – 15 баллов**.
4. Задача решена, но допущены незначительные погрешности – **16-24 баллов**.
5. Задача решена полностью и получен правильный ответ – **25 баллов**.

Максимальное количество баллов за полностью выполненное задание равно 100.