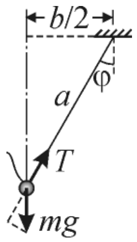
Задание для 10-х – 11-х классов

Первый тур

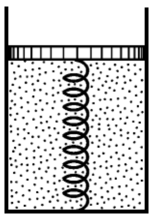
1. Поезд начинает двигаться с постоянным ускорением и проходит начальный отрезок пути разгона, составляющий 1/9 часть от полного пути разгона, со средней скоростью $v_{ср}$ = 10 км/ч. Какова скорость v поезда в конце пути разгона? Ответ приведите в км/ч и округлите до целых.

1. Решение. Поскольку движение поезда является равноускоренным с нулевой начальной скоростью, справедливы равенства: $v_{ср} = \frac{v_1}{2}$, $\frac{L}{9} = \frac{v_1 t_1}{2}$, $L = \frac{vt}{2}$. Здесь v_1 – скорость поезда в конце девятой части пути разгона, t_1 – время его движения на 1/9 пути разгона, t – полное время движения поезда на всем пути разгона, L – длина пути разгона. Из этих равенств следует, что $v = 18 v_{ср} \frac{t_1}{t}$. По законам равноускоренного движения $\left(\frac{t_1}{t}\right)^2 = \frac{1}{9}$. **Ответ:** $v = 6 v_{ср} = 60$ км/ч.

2. Шарик массой $m = 100$ г подвешен на двух одинаковых нитях длиной $a = 1$ м каждая так, что точки подвеса нитей расположены на одной горизонтали. Расстояние между точками подвеса нитей равно $b = 1$ м. Найдите силу натяжения T правой нити сразу после пережигания левой нити. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Нити считайте нерастяжимыми. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

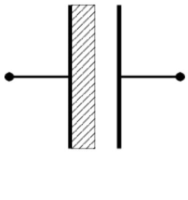


2. Решение. После того, как одну из нитей пережгут, шарик начнет двигаться по дуге окружности радиуса a. В начальный момент скорость шарика и его центростремительное ускорение будут равны нулю. Отсюда следует, что сумма сил, действующих на шарик в направлении нити, также равна нулю. Величина силы натяжения нити в этот момент определяется формулой $T = mg\cos\varphi$, где g – ускорение свободного падения, φ – начальный угол отклонения нити от вертикали. Косинус этого угла выражается формулой $\cos\varphi = \sqrt{1-(b/2a)^2}$. Отсюда получаем $(T/mg)^2 = 1-(b/2a)^2$ и $T = mg\sqrt{1-(b/2a)^2} \approx 0{,}87$ Н. **Ответ:** $T = mg\sqrt{1-(b/2a)^2} \approx 0{,}87$ Н.



3. В вертикально расположенном цилиндре находится кислород массой $m = 64$ г, отделенный от атмосферы поршнем, который соединен с дном цилиндра пружиной жесткостью $k = 8{,}3\cdot10^2$ Н/м. При температуре $T_1 = 300$ К поршень располагается на расстоянии $h = 1$ м от дна цилиндра. До какой температуры T_2 надо нагреть кислород, чтобы поршень расположился на высоте $H = 1{,}5$ м от дна цилиндра? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К), молярная масса кислорода $M = 32$ г/моль. Ответ приведите по шкале Кельвина, округлив его до одного знака после запятой.

3. Решение. Обозначим через M_0 массу поршня, а через p_0 – атмосферное давление. На поршень действуют в общем случае четыре силы: сила тяжести $M_0 g$, сила упругости пружины kx (x – удлинение пружины) и сила атмосферного давления $p_0 S$, направленные вниз, и сила давления газа в цилиндре pS, направленная вверх. Условия равновесия поршня в начальном и конечном состояниях имеют вид: $M_0 g + p_0 S + kx_1 = p_1 S$, $M_0 g + p_0 S + kx_2 = p_2 S$. Здесь p_1 и p_2 – давления газа в начальном и конечном состояниях. Вычитая из второго уравнения первое, получаем: $p_2 - p_1 = \frac{k}{S}(x_2 - x_1) = \frac{k}{S}(H - h)$. С другой стороны, из уравнения Менделеева–Клапейрона, записанного для начального и конечного состояний газа: $p_1 hS = \frac{m}{M} RT_1$, $p_2 HS = \frac{m}{M} RT_2$, вытекает, что $p_2 - p_1 = \frac{mR}{MS}\left(\frac{T_2}{H} - \frac{T_1}{h}\right)$. Приравнивая разности давлений газа, найденные этими способами, получаем $T_2 = T_1\frac{H}{h} + \frac{MkH(H-h)}{mR} = 487{,}5$ К. **Ответ:** $T_2 = T_1\frac{H}{h} + \frac{MkH(H-h)}{mR} = 487{,}5$ К.



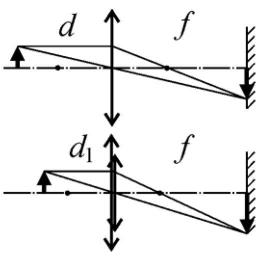
4. В плоский воздушный конденсатор вставили диэлектрическую пластину так, что она заняла половину пространства между обкладками конденсатора (см. рисунок). При этом емкость конденсатора увеличилась в $n = 1{,}6$ раз. Определите диэлектрическую проницаемость ε пластины. Ответ округлите до целых.

4. Решение. Емкость конденсатора с диэлектриком $C=\dfrac{q}{u}$, где $u=\dfrac{d}{2}\cdot\left(E+E_0\right)$, d – расстояние между пластинами конденсатора, $E=\dfrac{E_0}{\varepsilon}$ – напряженность поля в диэлектрике, E_0 – напряженность поля в пространстве, свободном от диэлектрика. Отсюда $C=\dfrac{2q\varepsilon}{dE_0\left(\varepsilon+1\right)}$. Емкость пустого конденсатора $C_0=\dfrac{q}{dE_0}$. Таким образом, $n=\dfrac{C}{C_0}=\dfrac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}$. Отсюда $\varepsilon=\dfrac{n}{2-n}=4$.

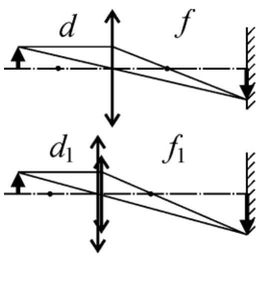
Ответ: $\varepsilon=\dfrac{n}{2-n}=4$.

5. На расстоянии f = 15 м от объектива проекционного аппарата расположен экран с размерами 2×3 м. На экране получено четкое изображение диапозитива, имеющего размеры 24×36 мм. При этом изображение занимает половину площади экрана. Рассчитайте оптическую силу D тонкой линзы, которую следует вплотную приставить к объективу проекционного аппарата, чтобы четкое изображение точно уложилось в размеры экрана. Объектив проекционного аппарата считайте тонкой линзой. Ответ приведите в диоптриях, округлив до одного знака после запятой

5. Решение. Условие задачи допускает два равноценных подхода к решению. *В первом подходе* естественно предположить, что объектив проекционного аппарата остается неподвижным, а формирование резкого изображения на экране достигается путем перемещения диапозитива. Как известно, линейное увеличение □, даваемое линзой, может быть рассчитано по формуле $\Gamma=\dfrac{f}{d}$, где d – расстояние от диапозитива до линзы (объектива), а f – расстояние от линзы до экрана, которое не изменяется. Из формулы тонкой линзы следует, что оптическая сила линзы $D=\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{f}(\Gamma+1)$. При сдвинутых вплотную тонких линзах их оптические силы складываются. Обозначив через D_0 оптическую силу объектива диапроектора, а через D – оптическую силу добавочной линзы, имеем: $D_0=\dfrac{1}{f}(\Gamma_0+1)$, $D+D_0=\dfrac{1}{f}(\Gamma+1)$, откуда $D=\dfrac{1}{f}(\Gamma-\Gamma_0)$. Учитывая, что конечное увеличение $\Gamma=\dfrac{2000}{24}=\dfrac{3000}{36}\approx83{,}3$, а начальное $\Gamma_0=\dfrac{\Gamma}{\sqrt{2}}\approx58{,}9$, находим, что $D\approx1{,}6$ дптр.



Ответ: $D=\dfrac{1}{f}(\Gamma-\Gamma_0)\approx1{,}6$ дптр, где $\Gamma=\dfrac{2000}{24}\approx83{,}3$; $\Gamma_0=\dfrac{\Gamma}{\sqrt{2}}\approx58{,}9$.



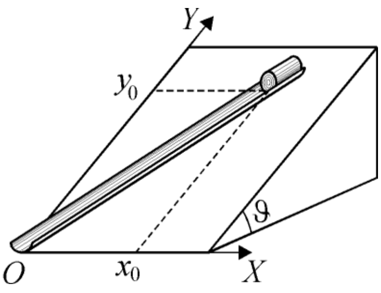
В рамках *второго подхода* можно считать, что диапозитив остается неподвижным, а после прижимания к объективу дополнительной линзы, для фокусировки изображения на экран перемещают объектив. В этом случае расстояние между диапозитивом и экраном не изменяется, поэтому

$d + f = d_1 + f_1$, где d – первоначальное расстояние от диапозитива до объектива, а f – первоначальное расстояние от объектива до экрана, d_1 и f_1 – те же расстояния после прижимания дополнительной линзы (см. рисунок). По формуле линзы имеем $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D_0$, $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = D_0 + D$, где D_0 – оптическая сила объектива диапроектора, а D – оптическая сила добавочной линзы. Отсюда $D = \frac{f_1 + d_1}{d_1 f_1} - \frac{f + d}{df} = (f + d)\left(\frac{1}{d_1 f_1} - \frac{1}{df}\right)$. Увеличение, даваемое объективом, $\Gamma_0 = \frac{f}{d}$, увеличение, даваемое объективом с добавочной линзой, $\Gamma = \frac{f_1}{d_1}$, причем $\Gamma_0 = \frac{\Gamma}{\sqrt{2}}$. Приведем промежуточные преобразования: $d_1 = \frac{f_1}{\Gamma}$, $d_1 + f_1 = f_1 \frac{\Gamma + 1}{\Gamma}$, $d = f \frac{\sqrt{2}}{\Gamma}$, $d + f = f \frac{\Gamma + \sqrt{2}}{\Gamma}$, $f_1 = f \frac{\Gamma + \sqrt{2}}{\Gamma + 1}$, $d_1 = f \frac{\Gamma + \sqrt{2}}{\Gamma(\Gamma + 1)}$. Подставляя записанные выражения в формулу для D, находим, что $D = \frac{(\sqrt{2} - 1)(\Gamma^2 - \sqrt{2})}{\sqrt{2}(\Gamma + \sqrt{2}) f}$. По условию $\Gamma = \frac{2000}{24} = \frac{3000}{36} \approx 83{,}3$. Учитывая, что $\Gamma >> 1$, это выражение можно упростить и привести к виду $D \approx \frac{1}{f}(\Gamma - \Gamma_0)$, где $\Gamma_0 = \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} \approx 58{,}9$.

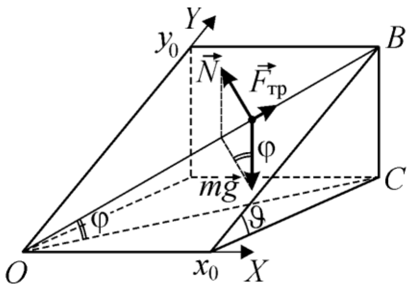
Ответ: $D = \frac{(\sqrt{2} - 1)(\Gamma^2 - \sqrt{2})}{\sqrt{2}(\Gamma + \sqrt{2}) f} \approx \frac{1}{f}(\Gamma - \Gamma_0) \approx 1{,}6$ дптр, где $\Gamma = \frac{2000}{24} \approx 83{,}3$; $\Gamma_0 = \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} \approx 58{,}9$.

Примечание: Поскольку увеличение изображения достаточно велико ($\Gamma, \Gamma_0 >> 1$), ответы при обоих подходах практически совпадают. Поэтому оба подхода следует считать правильными.

6. На наклонной плоскости, образующей с горизонтальной поверхностью угол $\vartheta = 30°$, закреплен желоб, как показано на рисунке. С плоскостью связана координатная система XOY, начало которой совмещено с нижней точкой желоба. По желобу из состояния покоя начинает соскальзывать маленькая гирька. Найдите скорость v гирьки в нижней точке желоба, если начальные координаты гирьки $x_0 = 0{,}5$ м, $y_0 = 1$ м, а коэффициент трения между гирькой и желобом $\mu = 0{,}3$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Ответ округлите до одного знака после запятой.



6. Решение. Гирька движется по желобу вдоль прямой OB, образующей с горизонталью угол □, под действием сил, изображенных на рисунке. Здесь m – масса гирьки, $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{N}$ – нормальная составляющая силы реакции желоба, $\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения скольжения, причем $F_{\text{тр}} = \mu N$ и $N = mg\cos\varphi$. Из рисунка видно, что $\cos\varphi = \frac{OC}{OB}$, где $OC = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 \cos^2\vartheta}$, $OB = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Следовательно,



$F_{\text{тр}} = \mu mg\dfrac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2\cos^2\vartheta}}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$. Работа силы трения при перемещении гирьки из точки B в точку O равна по модулю $A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} \cdot OB = \mu mg\sqrt{x_0^2 + y_0^2\cos^2\vartheta}$. По закону изменения механической энергии $mgy_0\sin\vartheta = \dfrac{mv^2}{2} + \mu mg\sqrt{x_0^2 + y_0^2\cos^2\vartheta}$. Выражая из этого равенства v, получаем, что $v = \sqrt{2g(y_0\sin\vartheta - \mu\sqrt{x_0^2 + y_0^2\cos^2\vartheta})} = 2{,}0$ м/с.

Ответ. $v = \sqrt{2g(y_0\sin\vartheta - \mu\sqrt{x_0^2 + y_0^2\cos^2\vartheta})} = 2{,}0$ м/с.