

Задача 1. Условие. На обочине прямолинейного участка шоссе установлены на равных расстояниях друг от друга четыре столбика. Мотоциклист разгоняется по шоссе, двигаясь с постоянным ускорением. При этом отрезок пути между первым и вторым столбиками он преодолевает за время $t_1 = 2$ с, а отрезок пути между вторым и третьим столбиками – за время $t_2 = 1$ с. Каково время t_3 движения мотоциклиста на отрезке пути между третьим и четвертым столбиками?

Задача 1. Решение. Пусть расстояние между столбиками равно S , скорость мотоциклиста в момент проезда первого столбика равна v_0 , а его ускорение равно a . Кинематические уравнения движения мотоциклиста на заданных в условии отрезках пути имеют вид:

$$S = v_0 t_1 + \frac{a t_1^2}{2}, \quad S = (v_0 + a t_1) t_2 + \frac{a t_2^2}{2}, \quad S = (v_0 + a t_1 + a t_2) t_3 + \frac{a t_3^2}{2}.$$

Вводя обозначения $t_0 = \frac{2v_0}{a}$, $\tau = \sqrt{\frac{2S}{a}}$, последнее из этих уравнений приведем к виду:

$$t_3^2 + 2(t_1 + t_2 + (t_0/2))t_3 - \tau^2 = 0.$$

Условию задачи удовлетворяет положительный корень этого уравнения:

$$t_3 = -(t_1 + t_2 + (t_0/2)) + \sqrt{(t_1 + t_2 + (t_0/2))^2 + \tau^2}.$$

Чтобы получить ответ, осталось найти t_0 и τ . Для этого воспользуемся первым и вторым кинематическими уравнениями движения мотоциклиста, которые в наших обозначениях принимают вид:

$$\tau^2 = t_0 t_1 + t_1^2, \quad \tau^2 = (t_0 + 2t_1)t_2 + t_2^2.$$

Решая эту систему, находим

$$t_0 = \frac{t_2^2 - t_1^2 + 2t_1 t_2}{t_1 - t_2} = 1 \text{ с}, \quad \tau^2 = \frac{(t_1 + t_2)t_1 t_2}{t_1 - t_2} = 6 \text{ с}^2.$$

Следовательно, $t_3 = -3,5 + \sqrt{3,5^2 + 6} \approx 0,77$ с.

Задача 2. Условие. К дну кастрюли примерз кусок льда, имеющий температуру 0°C . В кастрюлю налили воду при 0°C в таком количестве, что она полностью покрыла кусок льда. При этом высота уровня воды составила $h_0 = 20$ см. После того, как содержимому кастрюли передали $Q = 60$ кДж теплоты, $\eta = 10\%$ льда растаяло, а оставшийся лед поднялся на поверхность воды. На какой высоте h оказался при этом уровень воды в кастрюле? Кастрюля имеет цилиндрическую форму, площадь ее поперечного сечения $S = 200$ см².

Задача 2. Решение. Пусть m_0 – начальная масса льда. Тогда примерзший ко дну лед вытесняет объем $V_0 = \frac{m_0}{\rho_{\text{л}}}$. Всплывший лед массой $m = m_0 \left(1 - \frac{\eta}{100\%}\right)$ вытеснит объем $V = \frac{m}{\rho_{\text{в}}}$, а

образовавшаяся при таянии льда массой $\frac{\eta m_0}{100\%}$ вода займет объем $V' = \frac{\eta m_0}{100\% \cdot \rho_{\text{в}}}$. Обозначив

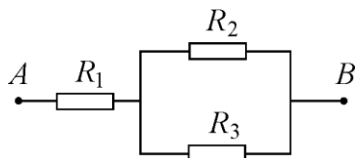
через $V_{\text{в}}$ начальный объем воды в кастрюле, имеем: $Sh_0 = V_{\text{в}} + V_0$, $Sh = V_{\text{в}} + V + V'$. Из записанных

равенств находим $h = h_0 - \frac{m_0}{S} \cdot \frac{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}{\rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}}$. Для определения начальной массы льда m_0

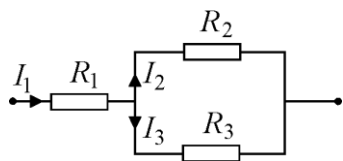
воспользуемся уравнением теплового баланса: $Q = \frac{\eta}{100\%} m_0 \lambda$, откуда $m_0 = \frac{100\%}{\eta} \cdot \frac{Q}{\lambda}$. Ответ:

$$h = h_0 - \frac{100\%}{\eta} \cdot \frac{Q(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}{S\lambda\rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}} \approx 19 \text{ см.}$$

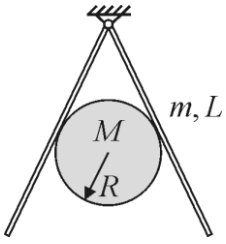
Задача 3. Условие. При выполнении лабораторной работы по физике ученик получил от учителя три резистора. При этом он обнаружил, что заводская маркировка на резисторах стерлась, и установить по ней значения сопротивлений резисторов невозможно. По указанию учителя ученик собрал цепь, схема которой изображена на рисунке, и подключил к точкам A и B источник постоянного тока. Затем он измерил силу тока I_1 , протекающего по резистору R_1 , и напряжение U_2 на резисторе R_2 . Оказалось, что $I_1 = 1,6$ А, а $U_2 = 2$ В. Узнав от учителя, что сопротивление R_3 в $n = 3$ раза больше сопротивления R_2 , ученик смог по этим данным рассчитать значение сопротивления R_3 . Какой ответ получил ученик?



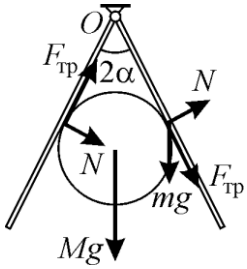
Задача 3. Решение. Обозначим токи, текущие в ветвях схемы, как показано на рисунке. Тогда справедлива следующая система уравнений: $I_1 = I_2 + I_3$, $U_2 = I_2 R_2$, $U_2 = I_3 R_3$, $R_3 = n R_2$. Разрешая ее относительно R_3 , получаем ответ:

$$R_3 = (n + 1) \frac{U_2}{I_1} = 5 \text{ Ом.}$$


Задача 4. Условие. Изучив в школе законы равновесия твердых тел, ученик решил проверить эти законы на опыте. Для этой цели он раздобыл две одинаковые тонкие шероховатые дощечки длиной L и массой m каждая, а также отрезок шероховатой круглой палки радиусом R и массой M . С помощью дверной петли он соединил концы дощечек и подвесил их к опоре, как показано на рисунке. Затем он отклонил дощечки от вертикали и поместил между ними палку, добившись того, чтобы она касалась дощечек точно в их центрах. Отпустив дощечки и палку, ученик убедился в том, что все тела остались в равновесии. При каком значении коэффициента трения между палкой и дощечками это возможно?



Задача 4. Решение. Цилиндр и доски находятся в равновесии под действием сил, модули и направления которых изображены на рисунке, где Mg и mg – модули сил тяжести, действующих на цилиндр и на каждую из досок, N – модуль нормальной составляющей силы взаимодействия каждой из досок и цилиндра, $F_{\text{тр}}$ – модуль силы трения покоя между цилиндром и каждой из досок. Силы реакции оси, на которой подвешены доски, на рисунке не показаны. Для облегчения анализа рисунка в левой его части изображены силы, действующие только на цилиндр, а в правой – только на правую доску. Уравнение моментов сил, действующих на одну из досок, записанное относительно точки O , имеет вид:



$$mg \frac{L}{2} \sin \alpha = N \frac{L}{2}.$$

Цилиндр находится в равновесии при выполнении условия:

$$Mg + 2N \sin \alpha = 2F_{\text{тр}} \cos \alpha.$$

Из записанных уравнений находим, что

$$N = mg \sin \alpha, \quad F_{\text{тр}} = \frac{Mg + 2mg \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha}.$$

Сила трения покоя удовлетворяет неравенству: $F_{\text{тр}} \leq \mu N$. Следовательно, система будет находиться в равновесии при условии, что $\mu \geq \frac{F_{\text{тр}}}{N}$. Учитывая, что $\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L/2)^2}}$,

$$\cos \alpha = \frac{L/2}{\sqrt{R^2 + (L/2)^2}}, \text{ получаем ответ: } \mu \geq \frac{(L^2 + 4R^2)M}{4mRL} + \frac{2R}{L}.$$

Задача 5. Условие. Знойным летом школьник Вася захотел помочь родителям уберечь урожай на дачном участке от засухи. Для этой цели он решил использовать электрический насос, установленный в колодце и подающий воду наверх с помощью шланга. Желая узнать перед началом работы, какова мощность насоса, Вася измерил время τ , за которое насос наполняет водой ведро объемом V , стоящее на поверхности земли. Затем, зная глубину h , на которой установлен насос, площадь поперечного сечения шланга S и плотность воды ρ , Вася легко рассчитал искомую мощность насоса. Какой результат получил дотошный школьник?

Задача 5. Решение. Пусть v – скорость воды в шланге. Через любое поперечное сечение шланга за время Δt перемещается вода массой $\Delta m = \rho S v \Delta t$. Работа, совершаемая насосом за это время по перемещению воды массой Δm , равна приращению кинетической и потенциальной энергии этого количества воды: $\Delta A = \frac{\Delta m v^2}{2} + \Delta m g h = \rho \left(g h + \frac{v^2}{2} \right) S v \Delta t$. По условию $V = S v \tau$, откуда $v = \frac{V}{S \tau}$.

Объединяя записанные выражения и учитывая, что $N = \frac{\Delta A}{\Delta t}$, получаем ответ:

$$N = \frac{\rho V}{\tau} \left(g h + \frac{V^2}{2 S^2 \tau^2} \right).$$

Задача 6. Условие. В цилиндрический сосуд, содержащий воздух, налили небольшое количество воды и закрыли сверху подвижным поршнем. Через некоторое время водяной пар в цилиндре стал насыщенным, причем его масса оказалась равной массе воды. Поддерживая температуру сосуда постоянной, объем под поршнем уменьшили в $k=2$ раза, в результате чего давление смеси в сосуде увеличилось в $n=1,5$ раза. Затем, вернув поршень в исходное положение, объем смеси стали увеличивать при той же постоянной температуре. Во сколько раз изменится давление смеси по отношению к первоначальному давлению в тот момент, когда вода в сосуде полностью испарится?

Задача 6. Решение. Поскольку плотность насыщенного водяного пара при комнатной температуре примерно на 5 порядков меньше плотности воды, а масса воды в начальном состоянии равна массе пара, объемом воды в сосуде можно пренебречь. Обозначим давление насыщенного пара через p_n , а парциальное давление воздуха – через $x p_n$. В соответствии с законом Дальтона начальное давление смеси равно $p_0 = (1+x)p_n$. После изотермического уменьшения объема смеси в k раз пар останется насыщенным (то есть его парциальное давление не изменится), парциальное давление воздуха увеличится в k раз, а давление смеси возрастет в n раз:

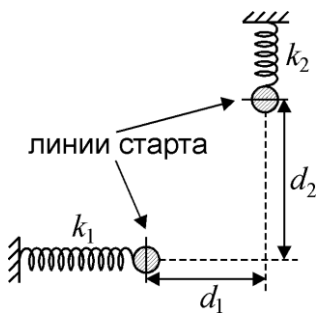
$$n p_0 = (1+kx)p_n = n(1+x)p_n.$$

Отсюда $x = \frac{n-1}{k-n} = 1$, то есть начальное давление смеси равно $p_0 = \frac{k-1}{k-n} p_n = 2 p_n$. Так как масса воды в начальном состоянии равна массе пара, то при изотермическом увеличении объема смеси в два раза вся вода испарится. При этом парциальное давление воздуха уменьшится в 2 раза, и конечное давление под поршнем станет равным

$$p_k = p_n + \frac{1}{2} x p_n = \frac{2k-n-1}{2(k-n)} p_n = 1,5 p_n.$$

Следовательно, $\frac{p_k}{p_0} = \frac{2k-n-1}{2(k-1)} = 0,75$, то есть давление смеси уменьшится в $4/3$ раз.

Задача 7. Условие. Легкую пружину разрезают на две части, отношение длин которых $n = 144/25$. Полученные пружины располагают на горизонтальном гладком столе перпендикулярно друг другу, закрепив их концы на неподвижных опорах, как показано на рисунке. К свободным концам пружин вплотную приближают одинаковые плоские фишки в виде дисков радиусами r . На столе проводят линии старта фишек, проходящие через их центры перпендикулярно осям пружин. Затем, перемещая фишки вдоль осей пружин, сжимают пружины на одинаковую величину и отпускают фишки так, что их центры пересекают линии старта одновременно. При каких значениях радиуса r фишек они будут скользить по столу, не сталкиваясь друг с другом? Расстояния от линий старта до точки пересечения траекторий фишек равны соответственно $d_1 = 13$ см и $d_2 = 26$ см.



Задача 7. Решение. Пусть длины пружин равны, соответственно, $l_1 = l$ и $l_2 = l/n$. Тогда жесткости пружин связаны соотношением $k_1 = k$ и $k_2 = nk$. Так как массы фишек m и начальные деформации пружин Δl по условию одинаковы, то из закона сохранения энергии $\frac{mv^2}{2} = \frac{k(\Delta l)^2}{2}$ следует, что скорости фишек после взаимодействия с пружинами будут $v_1 = v$ и $v_2 = \sqrt{n}v$. Таким образом, фишки одновременно начинают равномерное движение со скоростями v_1 и v_2 , направленными перпендикулярно друг другу. Найдем минимальное расстояние между центрами фишек при таком движении. Рассмотрим два способа решения.

Первый способ. Спустя время t после начала движения квадрат расстояния между центрами фишек равен

$$s^2 = (d_1 - v_1 t)^2 + (d_2 - v_2 t)^2 = (v_1^2 + v_2^2)t^2 - 2(d_1 v_1 + d_2 v_2)t + d_1^2 + d_2^2 = at^2 - 2bt + c,$$

где $a = v_1^2 + v_2^2$, $b = d_1 v_1 + d_2 v_2$, $c = d_1^2 + d_2^2$. Минимум этой квадратичной функции времени достигается при $t_0 = \frac{b}{a}$ и составляет величину $s_{\min}^2 = c - \frac{b^2}{a} = \frac{(d_1 v_2 - d_2 v_1)^2}{v_1^2 + v_2^2}$. Учитывая полученное

выше соотношение между скоростями v_1 и v_2 , получаем окончательно: $s_{\min} = \frac{|d_1 \sqrt{n} - d_2|}{\sqrt{n+1}}$

Второй способ. Перейдем в систему отсчета, движущуюся поступательно вместе с фишкой 1. В этой системе отсчета фишка 1 неподвижна, а фишка 2 движется со скоростью $\mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ вдоль прямой, описываемой уравнением

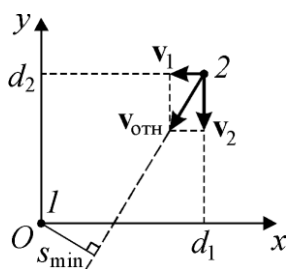
$$(y - d_2) = \frac{v_2}{v_1}(x - d_1), \quad \text{или} \quad y - \frac{v_2}{v_1}x + (d_1 - d_2) = 0. \quad \text{Запишем последнее}$$

уравнение в виде $Ax + By + C = 0$, где $A = 1$, $B = -\frac{v_2}{v_1}$, $C = d_1 - d_2$, и воспользуемся формулой, для определения расстояния между этой прямой и

точкой с координатами (x_0, y_0) : $s_{\min} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Полагая $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, после несложных

преобразований получаем, как и ранее, что $s_{\min} = \frac{|d_1 \sqrt{n} - d_2|}{\sqrt{n+1}}$.

Для того чтобы фишки не столкнулись друг с другом, минимальное расстояние между ними должно превышать $2r$. Отсюда получаем ответ: $r < \frac{|d_1 \sqrt{n} - d_2|}{2\sqrt{n+1}} = 1$ см.



Задача 8. Условие. На столе покоится вертикально расположенный цилиндрический сосуд. В сосуде под тяжелым подвижным поршнем находится гелий. Сверху на поршень очень медленно опустили груз массой m . Насколько изменилась при этом внутренняя энергия гелия? Теплообменом гелия с окружающей средой можно пренебречь. Масса груза мала по сравнению с массой поршня. Начальная высота H поршня над дном сосуда известна.

Задача 8. Решение. Изменение внутренней энергии гелия (идеального одноатомного газа) равно

$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T$, где ν – количество молей гелия, R – универсальная газовая постоянная.

Уравнения Менделеева–Клапейрона для начального и конечного состояний гелия имеют вид: $pV = \nu RT$, $(p + \Delta p)(V - \Delta V) = \nu R(T + \Delta T)$. Здесь p , V и T – начальные давление, объем и температура газа; Δp , ΔV и ΔT – их приращения. Пренебрегая произведением малых величин $\Delta p \Delta V$, из этих уравнений находим, что $\nu R \Delta T = V \Delta p - p \Delta V$. Поскольку гелий теплоизолирован, из первого закона термодинамики следует, что $p \Delta V = \Delta U$. Условия равновесия поршня массой M в начальном и конечном состояниях имеют вид: $pS = Mg + p_0 S$, $(p + \Delta p)S = (M + m)g + p_0 S$, где S – площадь поршня, p_0 – атмосферное давление. Отсюда $\Delta p = \frac{mg}{S} = \frac{mgH}{V}$. Объединяя записанные

выражения, получаем ответ: $\Delta U = \frac{3}{5} mgH$.

Задача 9. Условие. Два одинаковых металлических шара расположены на достаточно большом расстоянии друг от друга и несут заряды $Q_1 = 8$ мкКл и $Q_2 = 3$ мкКл. Экспериментатор имеет в своем распоряжении незаряженный металлический шарик, закрепленный на длинной изолирующей ручке. Держа незаряженный шарик за ручку, экспериментатор поочередно коснулся им сначала первого, а затем второго заряженных шаров. После этого он измерил заряд q_2 , накопившийся на изначально незаряженном шарике. Какой заряд остался на втором шаре, если известно, что $q_2 = 0,5$ мкКл?

Задача 9. Решение. Ключевым моментом в условии этой задачи является тот факт, что шары одинаковые. Отсюда следует, что при поочередном соприкосновении пробного шарика с каждым из шаров образуются тождественные друг другу системы проводников. Поэтому отношения заряда шара к заряду пробного шарика в обоих случаях должны быть одними и теми же. Если исходить из этого, то провести дальнейшие расчеты не составит труда. Пусть при соприкосновении пробного шарика с первым шаром на него с шара перетек заряд q_1 , а на шаре остался заряд $Q_1 - q_1$. Тогда справедливо равенство:

$$\frac{Q_1 - q_1}{q_1} = \frac{Q_{2к}}{q_2},$$

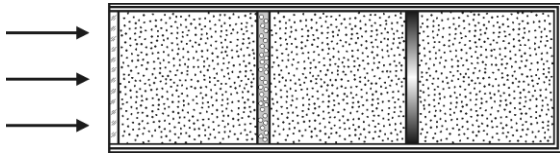
где $Q_{2к}$ – заряд, оставшийся на втором шаре. Из закона сохранения электрического заряда, примененного к процессу соприкосновения пробного шарика со вторым шаром, следует, что $Q_2 + q_1 = Q_{2к} + q_2$. Исключая из записанных уравнений $Q_{2к}$, получим квадратное уравнение относительно неизвестной величины q_1 :

$$q_1^2 + Q_2 q_1 - Q_1 q_2 = 0.$$

Решая его, найдем, что $q_1 = \frac{-Q_2 + \sqrt{Q_2^2 + 4Q_1 q_2}}{2}$. Следовательно,

$$Q_{2к} = Q_2 + q_1 - q_2 = \frac{Q_2 - 2q_2 + \sqrt{Q_2^2 + 4Q_1 q_2}}{2} = 3,5 \text{ мкКл.}$$

Задача 10. Условие. Герметично закрытый цилиндрический сосуд, одна из торцевых стенок которого является прозрачной, разделен на три отсека неподвижной пористой перегородкой и подвижным поршнем, способным перемещаться без трения. В начальном равновесном состоянии объемы всех трех отсеков равны и в каждом из них находится одно и то же количество идеального одноатомного газа. Через прозрачный торец левый отсек сосуда начинают облучать лазерным излучением, которое переводит часть атомов, содержащихся в этом отсеке, в возбужденное состояние. Возбужденные атомы в последующем могут излучать кванты и вновь переходить в основное состояние. Спустя некоторое время после начала облучения газ приходит к новому равновесному состоянию, в котором относительная доля возбужденных атомов в облучаемом отсеке составляет q ($0 < q < 1$). Поскольку пористая перегородка проницаема для невозбужденных атомов и непроницаема для возбужденных, давление газа в отсеках изменяется и поршень занимает новое положение. Найдите отношение x нового объема среднего отсека к его первоначальному значению, если температура газа поддерживается постоянной.



Задача 10. Решение. Обозначим через V объем каждого из трех отсеков сосуда до включения лазера, а через N – число атомов в каждом из них. Пусть N_1 – равновесное число атомов левом отсеке после включения лазера, а V_1 – новый объем среднего отсека. В результате действия лазерного излучения в левом отсеке будут находиться два различных идеальных газа: газ из $N_1 q$ возбужденных атомов и газ из $N_1(1-q)$ невозбужденных атомов. Поскольку перегородка проницаема для невозбужденных атомов, их концентрация в новом равновесном состоянии будет одинаковой с обеих сторон от перегородки, т.е. $\frac{N_1(1-q)}{V} = \frac{2N - N_1}{V_1}$. Учитывая, что давление p

идеального газа связано с концентрацией атомов n уравнением $p = nkT$, где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, условие механического равновесия поршня в новом состоянии можно записать в виде: $\frac{2N - N_1}{V_1} = \frac{N}{2V - V_1}$. Введем обозначения $x = \frac{V_1}{V}$ и $y = \frac{N_1}{N}$. Тогда

записанные выше уравнения примут вид: $x = \frac{2-y}{y(1-q)}$, $y = \frac{4-3x}{2-x}$. Исключая из этих уравнений y ,

находим искомое отношение объемов: $x = \frac{3-4q}{3(1-q)}$. Видно, что при $q > \frac{3}{4}$ ответ теряет физический

смысл. Это означает, что при больших значениях q в среднем отсеке останется так мало атомов, что создаваемое ими давление будет недостаточным для того, чтобы уравновесить давление газа в правом отсеке. В результате поршень сместится до самой перегородки.

Ответ: $x = \frac{3-4q}{3(1-q)}$ при $q \leq \frac{3}{4}$; $x = 0$ при $q > \frac{3}{4}$.