

**Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова**

Олимпиада «Ломоносов», информатика, 2011 год, вариант 1.

Задача 1. Бизнесмен Жан Дюпон получил по электронной почте письмо с файлом в формате MP3 — записью переговоров конкурентов. При пересылке по электронной почте все нетекстовые данные кодируются представлением Base64, в котором каждая порция исходных данных размером шесть бит записывается одним текстовым символом-байтом. При доставке письма с почтового сервера на компьютер бизнесмена первая половина файла была передана с постоянной скоростью передачи полезных данных V меbibит в секунду. Вторая половина файла была получена со скоростью постоянно больше V на 2 меbibита в секунду. Если бы бизнесмен предпочел не пользоваться электронной почтой, а скачать запись с сайта Викиликс, он затратил бы в два раза меньше времени, чем заняла пересылка электронного письма. Скорость соединения с сайтом Викиликс всегда постоянна и на 0,75 меbibита в секунду больше V . Определите скорость V . Ответ обоснуйте.

Указания: В задаче всюду имеется в виду скорость передачи полезных данных, то есть, самого файла; передача любых других данных во внимание не принимается. Файл на сервере размещен в исходном (не Base64) представлении.

1 меbibит в секунду = 1024 киbibит в секунду = 1048576 бит в секунду.

Задача 2. Профессор Плейшнер использует следующую систему для передачи сообщений. В конспиративной квартире есть два горшка с фикусами, два горшка с бегониями, три горшка с кактусами и один горшок с юккой. Чтобы передать сообщение профессор выставляет пять горшков в ряд на подоконник, но так, чтобы никакие три горшка с одинаковым растением не располагались рядом.

Какое количество информации может быть передано таким способом? Ответ обоснуйте.

Задача 3. При разминировании взрывного устройства было обнаружено, что к нему подходят три провода: красный, желтый и зеленый, к каждому из которых прикреплена записка. На записках написано:

- «красный провод подрывает бомбу или верно, что желтый провод подрывает бомбу и зеленый провод не подрывает бомбу»;
- «красный провод не подрывает бомбу и желтый провод подрывает бомбу»;
- «каждый из трех проводов подрывает бомбу».

Высказывание «А или В» означает, что верно высказывание А, или верно высказывание В, или верны оба высказывания одновременно.

По агентурной информации стало известно, что все записки либо истинны одновременно, либо ложны одновременно. Хотя бы один провод подрывает бомбу.

Для каждого провода определите, подрывает ли этот провод бомбу, либо укажите, что это определить невозможно. Ответ обоснуйте.

Задача 4. Рассмотрим позиционную систему счисления с основанием 14_{10} . Найдите в этой системе счисления максимальное число-палиндром, запись которого не длиннее 7_{10} цифр, каждая цифра в записи числа встречается не более двух раз, а значение числа делится нацело на 13_{10} . Для записи цифр, больших 9, используйте буквы А, В, С, D. Ответ обоснуйте.

Задача 5. С электронной таблицей размера 3×3 были проведены следующие операции:

- в ячейку А1 была записана формула =SUM(B\$1:\$C2);
- формула была скопирована во все ячейки А1...С1, А2...С2, А3...С3;
- в ячейку С3 была записана формула =2*С\$1+С2;
- эта формула была скопирована в ячейку В2;
- в ячейки С1 и С2 были записаны некоторые числа.

В результате в ячейке А2 отобразилось число 10, а в ячейке В3 — число 1. Определите, какие числа отображаются во всех девяти ячейках таблицы. Ответ обоснуйте.

Задача 6. Пусть дан массив `val` из $N=6$ элементов целого типа, в который записаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 в некотором порядке. Каждое число встречается ровно один раз. Массив индексируется от 0 до 5.

Рассмотрим следующую процедуру сортировки массива:

Язык Pascal	Язык C++
<pre>var i, j : integer; for i := 0 to N - 2 do for j := i + 1 to N - 1 do if val[i] > val[j] then swap(val[i], val[j]);</pre>	<pre>for (int i = 0; i < N - 1; ++i) for (int j = i + 1; j < N; ++j) if (val[i] > val[j]) swap(val[i], val[j]);</pre>

Здесь процедура (функция) `swap` меняет местами значение своих параметров, передаваемых по ссылке.

Найдите любое такое размещение чисел в массиве `val`, что в процессе сортировки выполняется 6 вызовов `swap`. Ответ обоснуйте.

Задача 7. Напишите подпрограмму (процедуру или функцию), которая на вход принимает массив из N целых чисел ($100 < N < 10^7$). Каждое число

находится в интервале $[0; M)$ ($2^{16} \leq M < 2^{31}$). После завершения подпрограммы измененный массив должен быть доступен основной программе.

Числа в массиве должны быть переупорядочены таким образом, чтобы сначала шли числа, дающие при делении на 7 остаток 5, затем числа, дающие при делении на 7 остаток 2, затем все остальные числа.

Решение не должно использовать дополнительную память размера, пропорционального N или более или пропорционального M или более. Решение должно быть максимально эффективным по времени.

Задача 8. Исполнитель «Рекурсик» позволяет вычислять выражения, записываемые следующим образом. В выражениях допускается использовать неотрицательные целые числа и символы переменных.

- $0(x)=0$ — функция, тождественно равная 0 для любого значения своего параметра.
- $N(x)=x+1$ — результатом функции является следующее число.
- $I[m, n](x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n)=x_m$ — функция возвращает значение параметра с порядковым номером m , у функции должно быть n параметров.
- S определяет суперпозицию нескольких функций и записывается в виде $F=S(G, F_1, F_2, \dots, F_m)$, где F — имя новой функции, G — функция m аргументов, в которую подставляются функции F_1, F_2, \dots, F_m , каждая из которых имеет n аргументов.

$$F(x_1, \dots, x_n)=G(F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n))$$

Пример определения функции с помощью оператора суперпозиции:

$$I=S(I[1, 1], I[1, 1])$$

$$O2=S(0, I[1, 2])$$

Результат выполнения:

$$I(3)=3$$

$$O2(1, 2)=0$$

- R — рекурсия. Оператор рекурсии определяет новую функцию и записывается в виде:

$$F=R(F_1, F_2);$$

где F — имя новой функции, которая имеет n аргументов, F_1 — функция $n - 1$ аргументов, F_2 — функция $n + 1$ аргументов.

$$F(x_1, \dots, x_k, 0)=F_1(x_1, \dots, x_k)$$

$$F(x_1, \dots, x_k, y)=F_2(x_1, \dots, x_k, y-1, F(x_1, \dots, x_k, y-1))$$

Пример определения функции с помощью оператора рекурсии:

$$I=S(I[1, 1], I[1, 1])$$

$$N3=S(N, I[3, 3])$$

$$A=R(I, N3)$$

Результат выполнения:

$$A(3,4)=7$$

$$A(5,8)=13$$

- M — минимизация. Оператор минимизации определяет новую функцию и записывает в виде:

$$F=M(G)$$

где F — имя новой функции, имеющей n аргументов, G — функция $n+1$ аргумента.

$$F(x_1, \dots, x_n) = \inf\{y : G(x_1, \dots, x_n, y) = 0\}$$

то есть функция возвращает минимальное значение y , при котором $G(x_1, \dots, x_n, y)$ равно 0, если такое значение y существует.

Пример определения функции с помощью оператора минимизации:

$$C0=M(0)$$

Результат выполнения:

$$C0(13)=0$$

Например, функция $M(x,y)$ вычисляет произведение x и y .

$$I=S(I[1,1], I[1,1])$$

$$N3=S(N, I[3,3])$$

$$A=R(I, N3)$$

$$A3=S(A, I[1,3], I[3,3])$$

$$M=R(0, A3)$$

Напишите для этого исполнителя определение функции $MULT$, которое вычисляет произведение двух из трех своих аргументов:

$$MULT(x,y,z) = x*z$$

**Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова**

Олимпиада «Ломоносов», информатика, 2011 год, вариант 2.

Задача 1. Агент Джон Смит получил по электронной почте письмо с графическим файлом — чертежом секретной установки по производству кваса. При пересылке по электронной почте все нетекстовые данные кодируются представлением Base64, в котором каждая порция исходных данных размером шесть бит записывается одним текстовым символом-байтом. При доставке письма с почтового сервера на компьютер агента первая половина файла была передана с постоянной скоростью передачи полезных данных V мегабит в секунду. Вторая половина файла была получена со скоростью постоянно больше V на 2 мегабита в секунду. Если бы агент предпочел не пользоваться электронной почтой, а скачать чертежи из Википедии, он затратил бы в четыре раза больше времени, чем заняла пересылка электронного письма. Скорость соединения с Википедией всегда постоянна и меньше V на 1,5 мегабита в секунду. Определите скорость V . Ответ обоснуйте.

Указания: в задаче всюду имеется в виду скорость передачи полезных данных, то есть, самого файла; передача любых других данных во внимание не принимается. Файл на сервере размещен в исходном (не Base64) представлении.

1 мегабит в секунду = 1024 кибибит в секунду = 1048576 бит в секунду.

Задача 2. Профессор Плейшнер использует следующую систему для передачи сообщений. В конспиративной квартире есть два горшка с фикусами, два горшка с бегониями, два горшка с кактусами, два горшка с юккой и два горшка с молочаем. Чтобы передать сообщение профессор выставляет шесть горшков в ряд на подоконник, но так, чтобы никакие два горшка с одинаковым растением не располагались рядом.

Какое количество информации может быть передано таким способом? Ответ обоснуйте.

Задача 3. Фумико попала в комнату, на столе в которой стоят три пузырька: маленький, средний и большой. На каждый из пузырьков наклеена записка. На записках написано:

- « в большом пузырьке йод или верно, что в маленьком пузырьке йод и в среднем пузырьке йода нет»;
- «в большом пузырьке йода нет и в маленьком пузырьке йод есть»;
- «йод в каждом пузырьке».

Высказывание «А или В» означает, что верно высказывание А, или верно высказывание В, или верны оба высказывания одновременно.

Фумико подсказали, что все записки либо истинны одновременно, либо ложны одновременно, и хотя бы один пузырек содержит йод.

Для каждого пузырька определите, есть или нет в пузырьке йод, либо укажите, что по имеющейся информации это сделать невозможно. Ответ обоснуйте.

Задача 4. Рассмотрим позиционную систему счисления с основанием 20_{10} . Найдите в этой системе счисления максимальное число-палиндром, запись которого не длиннее 7_{10} цифр, каждая цифра в записи числа встречается не более двух раз, а значение числа делится нацело на 19_{10} . Для записи цифр, больших 9, используйте буквы A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. Ответ обоснуйте.

Задача 5. С электронной таблицей размера 3×3 были проведены следующие операции:

- в ячейку A1 была записана формула =SUM(A2:\$C3);
- формула была скопирована во все ячейки A1...C1, A2...C2, A3...C3;
- в ячейку C3 была записана формула =\$A3+2*B3;
- эта формула была скопирована в ячейку B2;
- в ячейки A3 и B3 были записаны некоторые числа.

В результате в ячейке A1 отобразилось число 14, а в ячейке C1 — число -2. Определите, какие числа отображаются во всех девяти ячейках таблицы. Ответ обоснуйте.

Задача 6. Пусть дан массив `val` из $N=6$ элементов целого типа, в который записаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 в некотором порядке. Каждое число встречается ровно один раз. Массив индексируется от 0 до 5.

Рассмотрим следующую процедуру сортировки массива:

Язык Pascal	Язык C++
<pre>var i, j : integer; for i := 0 to N - 2 do for j := i + 1 to N - 1 do if val[i] > val[j] then swap(val[i], val[j]);</pre>	<pre>for (int i = 0; i < N - 1; ++i) for (int j = i + 1; j < N; ++j) if (val[i] > val[j]) swap(val[i], val[j]);</pre>

Здесь процедура (функция) `swap` меняет местами значение своих параметров, передаваемых по ссылке.

Найдите любое такое размещение чисел в массиве `val`, что в процессе сортировки выполняется 5 вызовов `swap`. Ответ обоснуйте.

Задача 7. Напишите подпрограмму (процедуру или функцию), которая на вход принимает массив из N целых чисел ($100 < N < 10^7$). Каждое число находится в интервале $[0; M)$ ($2^{16} \leq M < 2^{31}$). После завершения подпрограммы измененный массив должен быть доступен основной программе.

Числа в массиве должны быть переупорядочены таким образом, чтобы сначала шли числа, дающие при делении на 3 остаток 2, затем числа, дающие при делении на 3 остаток 1, затем числа, дающие при делении на 3 остаток 0.

Решение не должно использовать дополнительную память размера, пропорционального N или более или пропорционального M или более. Решение должно быть максимально эффективным по времени.

Задача 8. Исполнитель «Рекурсик» позволяет вычислять выражения, записываемые следующим образом. В выражениях допускается использовать неотрицательные целые числа и символы переменных.

- $O(x)=0$ — функция, тождественно равная 0 для любого значения своего параметра.
- $N(x)=x+1$ — результатом функции является следующее число.
- $I[m, n](x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n)=x_m$ — функция возвращает значение параметра с порядковым номером m , у функции должно быть n параметров.
- S определяет суперпозицию нескольких функций и записывается в виде $F=S(G, F_1, F_2, \dots, F_m)$, где F — имя новой функции, G — функция m аргументов, в которую подставляются функции F_1, F_2, \dots, F_m , каждая из которых имеет n аргументов.

$$F(x_1, \dots, x_n)=G(F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n))$$

Пример определения функции с помощью оператора суперпозиции:

$I=S(I[1, 1], I[1, 1])$

$O2=S(O, I[1, 2])$

Результат выполнения:

$I(3)=3$

$O2(1, 2)=0$

- R — рекурсия. Оператор рекурсии определяет новую функцию и записывается в виде:

$F=R(F_1, F_2);$

где F — имя новой функции, которая имеет n аргументов, F_1 — функция $n - 1$ аргументов, F_2 — функция $n + 1$ аргументов.

$F(x_1, \dots, x_k, 0)=F_1(x_1, \dots, x_k)$

$F(x_1, \dots, x_k, y)=F_2(x_1, \dots, x_k, y-1, F(x_1, \dots, x_k, y-1))$

Пример определения функции с помощью оператора рекурсии:

$I=S(I[1, 1], I[1, 1])$

$N3=S(N, I[3, 3])$

$A=R(I, N3)$

Результат выполнения:

$A(3, 4)=7$

$A(5, 8)=13$

- M — минимизация. Оператор минимизации определяет новую функцию и записывает в виде:

$$F=M(G)$$

где F — имя новой функции, имеющей n аргументов, G — функция $n+1$ аргумента.

$$F(x_1, \dots, x_n) = \inf\{y: G(x_1, \dots, x_n, y) = 0\}$$

то есть функция возвращает минимальное значение y , при котором $G(x_1, \dots, x_n, y)$ равно 0, если такое значение y существует.

Пример определения функции с помощью оператора минимизации:

$$C0=M(0)$$

Результат выполнения:

$$C0(13)=0$$

Например, функция $M(x, y)$ вычисляет произведение x и y .

$$I=S(I[1,1], I[1,1])$$

$$N3=S(N, I[3,3])$$

$$A=R(I, N3)$$

$$A3=S(A, I[1,3], I[3,3])$$

$$M=R(0, A3)$$

Напишите для этого исполнителя определение функции **SUMM**, которое вычисляет сумму двух из трех своих аргументов:

$$SUMM(x, y, z) = y+z$$