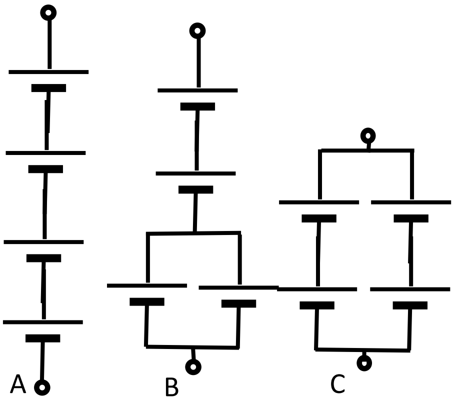
Второй этап (заочный) Всесибирской олимпиады по физике
(25 декабря 2018 г. - 20 января 2019 г.)
Задачи 11 класса
Возможные решения

Задача оценивается в 5 баллов при полном решении и правильном ответе в указанных в условии единицах. Если требуется найти несколько величин, то их значения приводятся в ответе через точку с запятой. Числовой ответ, если иное не оговорено в условии, округляется до трёх значащих цифр. Например, полученное расчетом число 328,51 округляется до 329; 2,003 – до 2,00; 5,0081 – до 5,01; 0,60135 – до 0,601, 0,12345·10^{19} округляется до 0,123·10^{19} и т.д. Если в условии задачи не указана система единиц, в таблицу нужно вносить результат в системе СИ. Ответ (округлённый) нужно внести в таблицу. При невыполнении любого из требований за задачу ставится 0 баллов. Без представления таблицы работа не проверяется.

1. Имеются 4 одинаковых батарейки с некоторым внутренним сопротивлением и один резистор. Если к резистору подключить одну батарейку, она создаст ток $I_1 = 0,4$ А. Если к нему подключить две последовательно соединенные батарейки, получится ток $I_2 = \frac{4}{7}$ А. Определите максимальный ток в резисторе, который можно получить с помощью имеющихся батареек.

Возможное решение

Предположим, что сопротивление резистора *R*, внутреннее сопротивление батарейки *r*, а ее ЭДС Е.



1) В первом случае $I_1 = \dfrac{E}{R+r}$, во втором $I_2 = \dfrac{2E}{R+2r}$.

Решаем уравнения и получаем $R = \dfrac{3}{2}r$, $E = rI_0$, где $I_0 = 1$А.

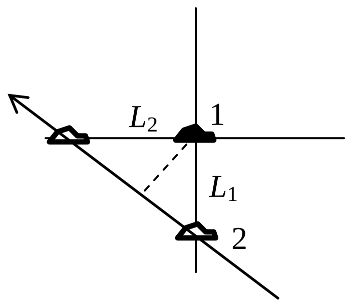
2) На рисунке показаны только 3 из возможных схем включения батареек.

3) Две параллельные батарейки можно заменить одной с ЭДС Е и внутренним сопротивлением $r/2$. Ток в цепи А - 0.727 *E*/*r*, В - 0.750 *E*/*r*, а в С - 0.800 *E*/*r*. Максимальный ток $I_{\max} = 0,8$ А.

Ответ: 0,800 или 0,800 А.

2. Два автомобиля движутся с постоянными скоростями по двум перпендикулярным дорогам. На обеих дорогах на расстоянии L=500 м от перекрестка установлены камеры. По их показаниям первый автомобиль во время T_1 = 14 час 20 мин прошел навстречу перекрестку со скоростью 72 км/час, а второй в T_2 = 14 час 20 мин 10 сек прошел навстречу перекрестку со скоростью 90 км/час. На какую минимальную дистанцию сблизятся автомобили?

Возможное решение



1) Примем, что скорость первого автомобиля V_1, второго – V_2. Если мы перейдем в систему отсчета, привязанную к первому автомобилю, второй в этой системе получит скорость $\vec{V}_{21} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ и будет двигаться по прямой линии.

2) Для того, чтобы зафиксировать эту линию, определим принадлежащие ей две точки, отвечающие моменту, когда оба автомобиля находятся на одной дороге (один из них – на перекрестке).

3) Первый автомобиль придет на перекресток в момент $T_{1n} = T_1 + L/V_1 =$ 14 час 20 мин 25 сек, второй в этот момент будет на расстоянии $L_1 = L - V_2(T_{1n} - T_2) = 125$ м .

4) Второй автомобиль придет на перекресток в $T_{2n} = T_2 + L/V_2 = 14$ час 20 мин 30 сек, второй в этот момент удалится от перекрестка на $L_2 = V_1(T_{2n} - T_{1n}) = 100$ м .

5) Минимальное расстояние между автомобилями определяется перпендикуляром из позиции первого автомобиля на линию траектории второго: $h = L_1 L_2 / \sqrt{L_1^2 + L_2^2} \approx 78{,}1$м .

Ответ: $\mathbf{L_{min}}$ ≈ 78,1 м.

Второй вариант решения. Примем время появления первого автомобиля перед камерой за ноль и ось «X» координат вдоль первой дороги, а «Y» - вдоль второй.

1) В таком случае координата первого автомобиля будет меняться со временем $x = -L + V_1 t$,

2) а второго - $y = -L + V_2(t - t_0)$, где $t_0 = T_2 - T_1$,

3) расстояние между автомобилями определим по теореме Пифагора $L(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(L - V_1 t)^2 + (L - V_2(t - t_0))^2}$.

4) Преобразуем выражение, выделив множители t:

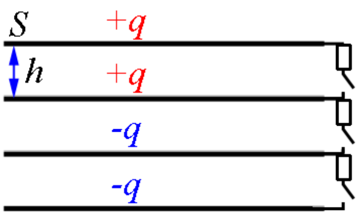
$L^2(t) = (V_1^2 + V_2^2)t^2 - 2\left(L(V_1 + V_2) + V_2^2 t_0\right)t + 2L^2 + 2LV_2 t_0 + V_2^2 t_0^2 = At^2 - Bt + C$.

5) Выражение $At^2 - Bt + C = A\left(t - \dfrac{B}{2A}\right)^2 + C - \dfrac{B^2}{4A^2}$ принимает минимальное значение $C - \dfrac{B^2}{4A^2}$, а $L_{\min} = \sqrt{C - \dfrac{B}{2A}} \approx 78{,}1$м.

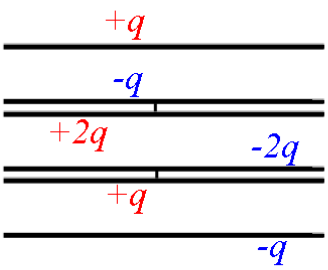
Ответ: 78,1 м или 78,1,

3. Четыре металлических пластины площади S = 100 см^2 каждая расположены на одинаковом расстоянии h = 1 мм друг от друга. На пластинах находятся заряды $+q$, $+q$, $-q$, $-q$, q = 10^{-8} Кл. Сколько тепла выделится, если замкнуть все ключи?

Возможное решение



1) Можно представить конструкцию как три последовательно соединенных одинаковых конденсатора. Емкость каждого конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{h}$, заряды q, $2q$, q.



2) Начальная энергия системы $W_0 = \dfrac{q^2}{2C} + \dfrac{(2q)^2}{2C} + \dfrac{q^2}{2C} = \dfrac{3q^2}{C} = \dfrac{3q^2 h}{\varepsilon_0 S}$ после замыкания ключей целиком переходит в тепло. Выделится тепло $Q = \dfrac{3q^2 h}{\varepsilon_0 S} \approx 3{,}39 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Ответ: 3,39·10^{-6} Дж или 3,39·10^{-6}

4. Чиполлино бежал от синьора Помидора. Сначала он двигался по ветру, развивая при этом мощность $N_1 = 10$ Вт, а, затем, с той же скоростью бежал против ветра, развивая мощность $N_2 = 20$ Вт. Какую мощность потребуется ему развить, чтобы с прежней скоростью двигаться перпендикулярно направлению ветра? Скорость ветра постоянная, а сила трения о воздух пропорциональна квадрату относительной скорости. Проскальзывания между обувью Чиполлино и дорогой нет.

Возможное решение

Обозначим скорость Чиполлино v, скорость ветра *u*.

1) При движении по ветру $N_1 = F_1 \mathrm{v} = \alpha\left(\mathrm{v} - u\right)^2 \mathrm{v}$.

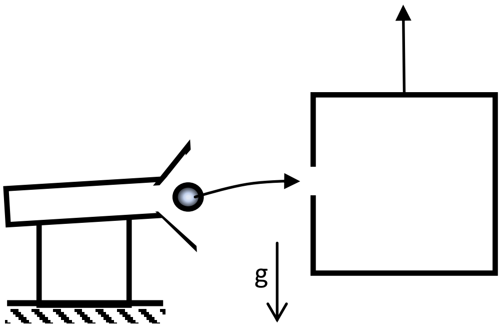
2) При движении против ветра $N_2 = F_2 \mathrm{v} = \alpha\left(\mathrm{v} + u\right)^2 \mathrm{v}$.

3) При движении перпендикулярно ветру $N = F_{\parallel} \mathrm{v} = \alpha \mathrm{v}\left(\mathrm{v}^2 + u^2\right)\cos\theta = \alpha \mathrm{v}^2 \sqrt{\mathrm{v}^2 + u^2}$, где θ – угол между направлением движения и силой трения.

4) Из первых двух уравнений находим *u*: $u = \mathrm{v}\dfrac{\sqrt{N_2} - \sqrt{N_1}}{\sqrt{N_2} + \sqrt{N_1}}$. В итоге

$$N = \frac{\left(\sqrt{N_1} + \sqrt{N_2}\right)\sqrt{N_1 + N_2}}{2\sqrt{2}} \approx 14{,}8 \text{ Вт.}$$

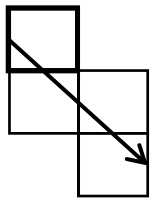
Ответ: 14,8 Вт или 14,8.



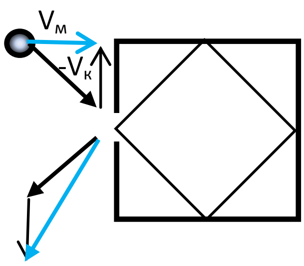
5. В цирке показывают трюк. Массивную кубическую коробку с дыркой посередине и со стороной a = 1.6 м бросают вертикально вверх. С подставки производят выстрел из пружинной “пушки” теннисным мячиком прямо в дырку коробки. Мячик горизонтально влетает через дырку в коробку, делает три упругих удара внутри коробки, выскакивает из нее на том же вертикальном уровне, на котором он в коробку влетел. Какие скорости были у мяча и у коробки в момент времени, когда мяч влетал в ее отверстие. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Возможное решение

1) Перейдем в систему отсчета коробки. Поскольку мяч и коробка испытывают одинаковые ускорения, движение мяча относительно коробки будет прямолинейным и равномерным все время, пока оба эти тела находятся в свободном полете.



2) Если при каждом ударе коробку вместе с траекторией мяча зеркально отражать от стенки, о которую мяч ударяется, его траектория станет прямолинейной (см. рисунок). Из этого рисунка видно: для того, чтобы мяч после трех ударов попал обратно в отверстие, он должен войти в коробку под углом 45°.

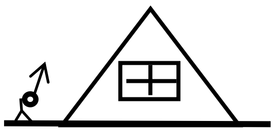


3) При переходе в систему отсчета коробки ее скорость $V_к$ вычитается из скорости мяча $V_м$ в лабораторной системе отсчета (см. рисунок). Для того, чтобы угол, под которым мяч влетает в коробку, был 45°, необходимо, чтобы $V_к = V_м$.

4) Время движения мяча внутри коробки $t = \dfrac{(4a/\sqrt{2})}{(V_м\sqrt{2})} = \dfrac{2a}{V_м}$.

5) За это время коробка должна вернуться в положение, в котором она была, когда мяч в нее влетел $t = \dfrac{2V_м}{g}$, откуда получаем ответ $V_м = V_к = \sqrt{ga} = 4$ м/с.

Ответ: 4.00 м/с; 4.00 м/с или 4.00; 4.00.



6. Мячик, брошенный со скоростью V=10 м/с, дважды упруго ударился о крышу треугольного дома (см. рисунок) и вернулся в точку броска через время t =2,6 с после броска. Крыша имеет угол 45˚ с горизонтом. Под каким углом (в радианах) был сделан бросок? Ускорение свободного падения g=10 м/с^2. Сопротивление воздуха не учитывать.

Возможное решение

1) Для того, чтобы мяч вернулся в точку броска, он должен вперед и назад двигаться по одной траектории.

2) После первого удара скорость мячика вертикальна, следовательно, перед ударом она была горизонтальна.

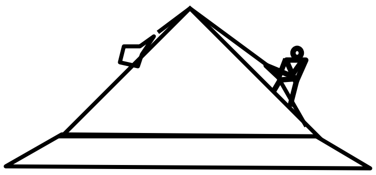
3) Пусть при броске компоненты скорости V_x, V_y, тогда получаем уравнение $V_x/g+V_y/g=t/2$.

4) $V_x^2+V_y^2=V^2$.

5) Исключая одну из компонент скорости, получаем, например, $V_x=(gt\pm\sqrt{8V^2-g^2t^2})/4$, $V_y=(gt\mp\sqrt{8V^2-g^2t^2})/4$.

6) Из условия, что человек, бросающий мяч, стоит на некотором расстоянии от крыши, получаем условие $x>y$, где x и y – расстояния по горизонтали и по вертикали от точки бросания мяча до точки его падения. Подставив значения $x=\frac{V_y}{g}V_x; y=\frac{V_y^2}{2g}$, получим условие $V_x>V_y/2$. Этому условию удовлетворяет вариант ответа $V_x=(gt+\sqrt{8V^2-g^2t^2})/4$ и $V_y=(gt-\sqrt{8V^2-g^2t^2})/4$. При другом варианте решения $\bar{V}_x=V_y;\bar{V}_y=V_x$ условие не выполняется $\bar{V}_x-\bar{V}_y/2\approx-2.14\,м/с<0$. В итоге получаем $\alpha=arctg\left(\frac{gt-\sqrt{8V^2-g^2t^2}}{gt+\sqrt{8V^2-g^2t^2}}\right)=arctg(0,4)$ ≈ 0,381 рад.

Ответ: 0,381 рад или 0,381.



7. Туриста от вершины скалы отделяет крутой и гладкий склон. Для того, чтобы его преодолеть, он привязывает веревку к рюкзаку, перебрасывает рюкзак через вершину и использует веревку в качестве дополнительной опоры. За какое минимальное время он может с помощью такой опоры добраться до вершины при постоянном натяжении веревки? Склон по обеим сторонам вершины имеет угол 45° по отношению к горизонту. Расстояние до вершины по склону L = 10 м, длина веревки 15 м, масса рюкзака равна трети массы альпиниста. Коэффициент трения μ альпиниста и его рюкзака о скалу всюду равен 0.55, веревка невесомая и скользит по скале без трения. Считать, что веревка вытянута параллельно склону. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Возможное решение

1) Второй закон Ньютона для туриста $Ma_1 = T + Mg(\mu\cos 45^\circ - \sin 45^\circ)$.

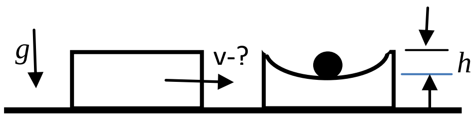
2) Второй закон Ньютона для рюкзака при его скольжении $ma_2 = T - mg(\mu\cos 45^\circ + \sin 45^\circ)$ где T – сила натяжения веревки, M и m – масса альпиниста и рюкзака, $M = 3m$.

3) Условие достижения цели: $a_1 t^2 / 2 = L$, где t – искомое время.

4) Условие того, что рюкзак не перевалится через вершину: $a_2 t^2 / 2 \le L / 2$, откуда следует, что $a_1 / a_2 \ge 2$ и $\dfrac{T}{m} \le \dfrac{3}{5\sqrt{2}} g\left(3\mu + 1\right)$

5) Из условия для T получаем максимальное значение ускорения туриста $a_{1\max} = \dfrac{4g}{5\sqrt{2}}\left(2\mu - 1\right) \approx 0,5657$ м/с^2 и $t_{\min} = \sqrt{2L / a_{1\max}}$.

Ответ: 5,95 с или 5,95.



8. На горизонтальном столе лежат два бруска. Левый брусок имеет массу m, а правый M, $M = 2m$. В правом бруске сделана сферическая выемка глубины h = 5 мм, в которой находится маленький шарик массы $m_1 = 0{,}1m$. Какую скорость нужно толчком сообщить левому бруску навстречу правому, чтобы после упругого столкновения брусков шарик вылетел из лунки? Трения нет. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Возможное решение

1) После удара правый брусок приобретет скорость u, левый – v_1, а шарик останется неподвижным.

2) Закон сохранения импульса: $m\mathrm{v} = m\mathrm{v}_1 + Mu$.

3) Закон сохранения энергии: $\frac{m\mathrm{v}^2}{2} = \frac{m\mathrm{v}_1^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}$, в итоге $u = \mathrm{v}\frac{2m}{m+M} = \frac{2}{3}\mathrm{v}$.

4) При минимальной сообщенной правому бруску скорости в крайнем положении шарика его скорость будет равна скорости правого бруска.

5) Законы сохранения импульса и энергии после удара: $Mu = (M + m_1)u_1$ и

$\frac{Mu^2}{2} = \frac{(M + m_1)u_1^2}{2} + m_1 gh$, откуда $u = \sqrt{\frac{M + m_1}{M} 2gh}$.

В итоге получаем значение скорости $v = \frac{M + m}{2m}\sqrt{\frac{2(M + m_1)gh}{M}} \approx 0{,}486$ м/с.

Ответ: 0,486 м/с или 0,486.

.

9. Автомобиль-дрэгстер, снабженный двигателем мощности N = 1000 кВт, проходит зачетную дистанцию, разогнавшись к ее концу до скорости V = 540 км/ч. Определите, за какое время он прошел эту дистанцию, если коэффициент трения колес о дорожное покрытие μ = 0.9, а трением о воздух и трением внутри ходовой части автомобиля можно пренебречь. В процессе разгона автомобиль опирается только на ведущие колеса. Справка: дрэг-рейсинг является гонкой на ускорение на короткой прямой дистанции, в которой автомобили стартуют из неподвижного положения. Масса автомобиля m=1000 кг. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Возможное решение

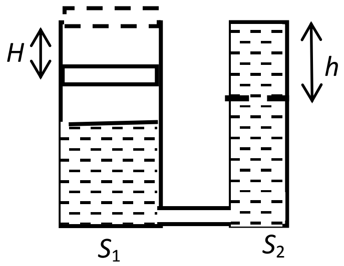
1) Вначале колеса автомобиля проскальзывают и его ускорение: $ma = \mu mg$.

2) Найдем скорость u_0, при которой колеса автомобиля перестают проскальзывать:
$\mu mgu_0 = N$, или $u_0 \approx 111$ м/с ≈ 400 км/ч, $u_0 < V$.

3) Время разгона до этой скорости: $t_1 = u_0 / \mu g \approx$12,35 с.

4) Дальнейшее ускорение автомобиля будет лимитировано мощностью:
$t_2 = \left(\frac{mV^2}{2} - \frac{mu_0^2}{2} \right) / N \approx$5,08 с. Искомое время $T = t_1 + t_2 \approx 17,4$ с.

Ответ: 17,4 с или 17,4.



10. Два открытых сверху цилиндра одинаковой высоты с площадью сечения S_1 для первого и S_2 для второго, $S_1 = 2S_2$, соединены снизу тонкой трубкой и частично заполнены жидкостью плотности ρ = 1000 кг/м^3. После того, как в первый цилиндр вставили тяжелый поршень, он медленно опустился и достиг равновесия на расстоянии H = 10,6 см от верхнего края цилиндра. При этом уровень жидкости во втором цилиндре поднялся до его верхнего края. Первоначально он находился на расстоянии h = 20 см от верхнего края. Опыт провели при некотором атмосферном давлении. Определите это давление. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2. Температура не меняется.

Возможное решение

1) Уровень жидкости в первом цилиндре относительно его верхнего края после того, как в него поместили поршень, получается из условия сохранения ее объема $h_1 = h + hS_2 / S_1 = 3h/2$.

2) Объем воздуха в первом цилиндре до опускания поршня $V_1 = hS_1$.

3) Объем воздуха в первом цилиндре после опускания поршня $V_2 = (h_1 - H)S_1$.

4) Закон Бойля-Мариотта $P_1V_2 = P_0V_1$.

5) Равновесие столба жидкости $P_1 - P_0 = \rho g h_1$.

6) Атмосферное давление $P_0 = \dfrac{\rho g h_1(h_1 - H)}{H + h - h_1} = \dfrac{3\rho g h(3h - 2H)}{2(2H - h)} \approx 9{,}70 \cdot 10^4$ Па.

Ответ: 9,70·10^4 Па или 9,70·10^4.

№ задачи	**ответ**
1	0,800 или 0,800 А
2	78,1 м или 78,1
3	$3{,}39 \cdot 10^{-6}$ Дж или $3{,}39 \cdot 10^{-6}$
4	14,8 Вт или 14,8
5	4.00 м/с; 4.00м/с или 4.00; 4.00
6	0,381 рад или 0,381
7	5,95 с или 5,95
8	0,486 м/с или 0,486
9	17,4 с или 17,4
10	$9{,}70 \cdot 10^{4}$ Па или $9{,}70 \cdot 10^{4}$