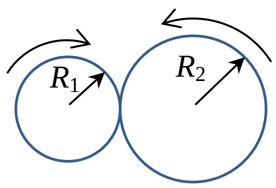
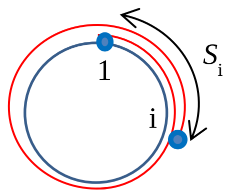
Второй этап (заочный) Всесибирской олимпиады по физике
(25 декабря 2018 г. - 20 января 2019 г.)
Задачи 10 класса
Возможные решения

Задача оценивается в 5 баллов при полном решении и правильном ответе в указанных в условии единицах. Если требуется найти несколько величин, то их значения приводятся в ответе через точку с запятой. Числовой ответ, если иное не оговорено в условии, округляется до трёх значащих цифр. Например, полученное расчетом число 328,51 округляется до 329; 2,003 – до 2,00; 5,0081 – до 5,01; 0,60135 – до 0,601, 0,12345·10^{19} округляется до 0,123·10^{19} и т.д. Желательно указать наименование единиц, в которых измерена соответствующая физическая величина. Если в условии задачи не указана система единиц, в таблицу нужно вносить результат в системе СИ. Ответ (округлённый) нужно внести в таблицу. При невыполнении любого из требований за задачу ставится 0 баллов. Без представления таблицы работа не проверяется.



1. Два вращающихся вала с параллельными осями касаются и не проскальзывают друг относительно друга. Первый вал имеет радиус 5 см, второй – 7 см. На первый вал нанесли маленькую капельку краски. Сколько окрашенных пятен будет на первом и втором валу через продолжительное время?

Возможное решение



1) За одно время каждый из валов прокатывается по дуге одной и той же длины. Примем, что длина окружности первого вала L_1, а второго - L_2, так что $L_2/L_1 = 7/5$. В некоторый момент пятно первого вала отпечатается на втором валу. Если после этого второй вал совершит n полных оборотов, отпечаток на втором валу создаст на первом валу новые пятна, причем длина дуги S_i, соединяющей первое пятно с новыми пятнами будет отличаться от nL_2 на целое число L_1: $nL_2 = kL_1 + S_i$, откуда $S_i = (7n_i - 5k_i)\dfrac{L_1}{5} = m_i\dfrac{L_1}{5}$, где m – целое число.

2) Аналогичные рассуждения для второго вала дадут длины $\bar{S}_j = (5n_j - 7k_j)\dfrac{L_2}{7} = m_j\dfrac{L_1}{5}$, то есть, вторичные пятна на обоих валах будут занимать позиции, разделенные целым количеством дуг длины $L_1/5$. Таких позиций 5 на первом валу и 7 на втором.

3) Остается показать, что все такие позиции будут заполнены. Действительно, после двух оборотов второго вала на первом и на втором валу появятся по два пятна, разделенные дугой $\dfrac{L_1}{5}$. Поскольку каждое следующее пятно можно считать первым в вновь отпечатанной последовательности пятен, мы придем к выводу, что все позиции с целыми числами m будут заняты пятнами краски.

Ответ: 5; 7.

2. Поезд разгоняется с постоянным ускорением. В момент времени t_1= 12 час 21 мин голова поезда проходит под мостом, в момент времени t_2 =12 час 21 мин 40 сек она проходит переезд, удаленный от моста на расстояние L_1 = 480 м, а в момент времени t_3 = 12 час 22 мин 20 сек - полустанок на расстоянии L_2 =1120 м от моста. Когда отправился поезд? Ответ выразите в часах, минутах и секундах.

Возможное решение

1) Допустим, поезд отправился во время t_0, и двигался с ускорением a. К мосту он подъехал со скоростью $v = a(t_1 - t_0)$.

2) Расстояние L_1 прошел за время $t_2 - t_1$: $L_1 = a(t_1 - t_0)(t_2 - t_1) + \frac{a(t_2 - t_1)^2}{2}$. Аналогичное выражение для промежутка мост - полустанок: $L_2 = a(t_1 - t_0)(t_3 - t_1) + \frac{a(t_3 - t_1)^2}{2}$. Исключаем a: $(t_1 - t_0)(L_1(t_3 - t_1) - L_2(t_2 - t_1)) = \frac{L_2(t_2 - t_1)^2 - L_1(t_3 - t_1)^2}{2}$.

В результате $t_0 = t_1 - \frac{L_2(t_2 - t_1)^2 - L_1(t_3 - t_1)^2}{2(L_1(t_3 - t_1) - L_2(t_2 - t_1))}$ = 12 час 19 мин 20 сек.

Ответ: 12 час 19 мин 20 сек.

3. Две остановки разделены участком дороги длиной 800 м с ограничением скорости. В экспериментальных целях водитель прошел эту дистанцию с разным ускорением разгона и торможения. Автомобиль проходил дистанцию за минимальное при данном ускорении и ограниченной скорости время, выбирая режим движения таким образом, чтобы разгоняться только в начале пути и тормозить только в его конце. Полученные значения времени пути при разных значениях ускорения показаны в таблице. Определите максимальную скорость автомобиля.

№	Время, сек	Ускорение при разгоне, м/с^2	Ускорение при торможении, м/с^2
1	113	0.25	0.25
2	80	0.5	0.5
3	60	1	1
4	50	2	2

Возможное решение

1) Возможны два сценария: без достижения предельной скорости и с достижением.

2) В первом случае: $S = \dfrac{at^2}{4}$, $\dfrac{at}{2} < \mathrm{v}$ или $a < \mathrm{v}^2 / S$.

3) Во втором случае $a \geq \mathrm{v}^2 / S$ и $S = \dfrac{\mathrm{v}^2}{a} + \mathrm{v}\left(t - \dfrac{2\mathrm{v}}{a}\right) = \mathrm{v}t - \dfrac{\mathrm{v}^2}{a}$, $S = \mathrm{v}t - \dfrac{\mathrm{v}^2}{a}$.

4) При $a_1 \geq \dfrac{\mathrm{v}^2}{S}, a_2 \geq \dfrac{\mathrm{v}^2}{S}$ $t_2 - t_1 = \mathrm{v}\left(\dfrac{1}{a_2} - \dfrac{1}{a_1}\right)$ и $\dfrac{(t_2 - t_1)a_1 a_2}{a_1 - a_2} = \mathrm{v}\,(1)$.

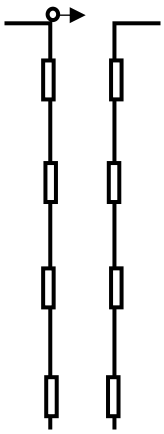
5) При $a_1 < \dfrac{\mathrm{v}^2}{S}, a_2 < \dfrac{\mathrm{v}^2}{S}$ $\dfrac{(t_2 - t_1)a_1 a_2}{a_1 - a_2} = \dfrac{2\sqrt{S}}{1/\sqrt{a_1} + 1/\sqrt{a_2}} < \mathrm{v}$

При $a > \dfrac{\mathrm{v}^2}{S}$ значения формулы (1) для разных опытов будут повторяться.

6) Проверяем значения формулы (1): для опытов 3 и 4, 2 и 3, 2 и 4 дают v=20 м/с, для 1 и 2 – v=16,5 м/с

В таблице формуле (1) удовлетворяют результаты последних трех опытов.

Ответ: 20 м/с или 20



4. Два одинаковых 25-этажных дома, построенных на горизонтальном участке земли, стоят на расстоянии L = 15 м друг от друга. С крыши одного из них горизонтально (перпендикулярно фасаду домов) со скоростью $v_0 = 16$ м/с пинают мяч. На каком этаже будет разбито окно? Сколько раз мяч отскочит от стены, прежде чем попасть в окно? Расстояние от крыши до верхнего края окна 25 этажа h = 2,5 м, высота всех окон h_1 = 1 м, высота этажа h_2 = 3 м (вместе с перекрытием). Считать удары мяча о стену дома упругими. Ускорение свободного падения g = 9,8м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

Возможное решение

1) Время между моментом броска и ударом и между последовательными ударами равно $t = L / v_0$, поскольку горизонтальная составляющая скорости не меняется при упругом ударе о вертикальную стену.

2) По вертикали мяч движется с ускорением g без начальной скорости. Высота, на которую он опустится, $H = gn^2t^2/2 = H_0n^2$, где $H_0 = gt^2/2$.

3) Для того, чтобы мяч попал в окно, необходимо, чтобы остаток от деления величины $H - h$ на h_2 был меньше h_1.

4) Проверяем условие: при первом ударе (n = 1) $H_0 - h \approx$ 1,81 м, при втором (n = 2) $4H_0 - h \approx 14{,}7$ м, остаток 2,7 м, и при третьем (n = 3) $9H_0 - h \approx$ 36,3 м, остаток 0,3 м и мяч попадает в окно 13-го этажа, пролетев 12 этажей.

Ответ: 13; 2.

5. Дорога заполнена автомобилями, имеющими одинаковую длину L = 5 м и движущимися на одинаковой дистанции с одинаковой скоростью. Какой должна быть их скорость, чтобы по дороге могло безопасно пройти максимальное количество автомобилей. Безопасным считается движение, при котором автомобиль успевает затормозить при внезапной остановке идущего перед ним автомобиля (например, в результате аварии). Коэффициент трения при торможении автомобиля μ = 0,5. Ускорение свободного падения g = 10м/с^2. Скорость выразите в километрах в час.

Возможное решение

1) Ускорение a автомобиля массы m при торможении $ma = \mu mg$, тормозной путь $S = \mathrm{v}^2 / 2a = \mathrm{v}^2 / 2\mu g$, где v - скорость.

2) Время между моментами появления в некоторой точке двух последовательных автомобилей $\Delta t = \dfrac{L+S}{\mathrm{v}} = \dfrac{L}{\mathrm{v}} + \dfrac{\mathrm{v}}{2\mu g}$.

3) Для оценки минимального значения преобразуем выражение:

$$\Delta t = \left(\sqrt{\frac{L}{\mathrm{v}}} - \sqrt{\frac{\mathrm{v}}{2\mu g}} \right)^2 + \sqrt{\frac{2L}{\mu g}}.$$

Минимальное значение Δt достигается при $\mathrm{v} = \sqrt{2\mu g L} \approx 7{,}07$ м/с = 25,5 км/час.

Ответ: 25,5 км/час или 25,5.

6. Велосипедист, затратив одинаковое количество энергии, может проехать по ровной дороге S_1 = 25 км за 1 час при попутном ветре и S_2 = 16 км за 1 час при встречном ветре, если в первом и втором случае дул одинаковый ветер. Какова была скорость ветра? Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату его скорости относительно велосипедиста. Скорость выразите в километрах в час.

Возможное решение

1) Пусть скорость ветра U, а скорость велосипедиста, соответственно, $V_1 = S_1 / t$, $V_2 = S_2 / t$ при попутном и встречном ветре, где t – время пути.

2) Работа велосипедиста при движении по ветру $A = F_{mp} S = \alpha(V_1 - U)^2 S_1$ и против ветра $A = \alpha(V_2 + U)^2 S_2$, одна и та же, то есть

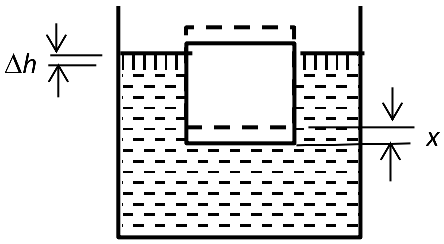
$$A = \alpha(V_1 - U)^2 S_1 = \alpha(V_2 + U)^2 S_2 \ .$$

В результате $U = \dfrac{S_1^{3/2} - S_2^{3/2}}{\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)t} \approx 6{,}78$ км/ч.

Ответ: 6,78 км/час или 6,78.

7. В сосуд квадратного сечения $a \times a$ налита вода, в которой плавает кубик с ребром b, погрузившись в воду на 2/3 своей высоты. Какую работу нужно совершить, чтобы этот кубик утопить? Масса кубика m = 100 г, ускорение свободного падения g = 10 м/с^2, размеры: a = 10,62 см, b = 5,31 см.

Возможное решение



1) Условие плавания кубика $mg = \frac{2}{3}\rho g b^3$, где ρ - плотность воды.

2) Условие сохранения объема $b^2 x = (a^2 - b^2)\Delta h$, где x – перемещение кубика вниз относительно его равновесного положения, а Δh - повышение уровня воды.

3) Определение перемещения до утопления $\frac{2}{3}b + x_0 + \Delta h_0 = b$, откуда $x_0 = \frac{(a^2 - b^2)b}{3a^2}$.

4) Определение силы, действующей на кубик, $F = \rho g(\frac{2}{3}b + x + \Delta h)b^2 - mg$.

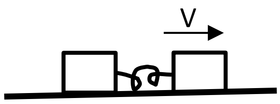
5) Работа при перемещении кубика вниз $A_{12} = \sum F(x)\Delta x = \sum \frac{\rho g b^2 a^2}{a^2 - b^2} x \Delta x$.

Суммарная работа при перемещении вниз до момента затопления A_{12}, и возврате вверх, $A_{21} = \sum \frac{\rho g b^2 a^2}{a^2 - b^2}(x_0 - x)\Delta x$, равна 0: $A_{12} + A_{21} = 0$, откуда $A_{12} = \frac{1}{2}\left(A_{12} - A_{21}\right) = \frac{1}{2}\sum \frac{\rho g b^2 a^2}{a^2 - b^2} x_0 \Delta x = \frac{\rho g b^2 a^2 x_0^2}{2\left(a^2 - b^2\right)}$. Можно обосновать ответ равенством работы и площади фигуры под кривой на графике зависимости силы от перемещения. В итоге $A = \frac{mg\left(a^2 - b^2\right)b}{12a^2} = 0,00332$ Дж.

Другой способ решения.

4а) Не выполняя пункты 4 и 5, эту работу можно определить, как изменение потенциальной энергии в поле тяжести при опускании кубика на x_0 и поднятии массы воды $m_1 = \rho b^2 x_0$ на высоту $\frac{2}{3}b + \frac{x_0}{2} + \frac{\Delta h}{2} = \frac{5}{6}b$.

Ответ: 0,00332 Дж или 0,00332.



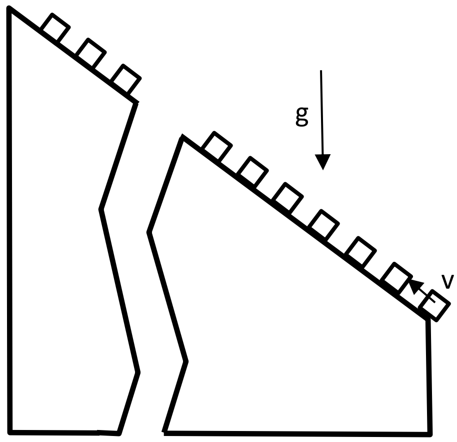
8. На горизонтальном столе лежат два одинаковых бруска массы m = 100 г каждый, связанные упругой резинкой жесткости k = 3000 н/м. Резинка расслаблена. После того, как правому бруску толчком сообщили скорость v = 1 м/с, резинка натянулась, порвалась, и бруски «разлетелись». При какой силе натяжения порвалась резинка, если скорость правого бруска после этого уменьшилась до ¾ v? Трения нет.

Возможное решение

1) Закон сохранения импульса $m\mathrm{v} = mu + \frac{3m\mathrm{v}}{4}$.

2) Закон сохранения энергии: $\frac{m\mathrm{v}^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{9m\mathrm{v}^2}{32} + \frac{kx^2}{2}$, где x отвечает натяжению нити перед ее разрывом, $kx = T$. После разрыва резинки ее энергия, накопленная к моменту ее максимального растяжения, теряется. Исключаем u и x и получаем ответ $T = \frac{\sqrt{3km}}{2\sqrt{2}}\mathrm{v} \approx 10{,}6$ Н.

Ответ: 10,6 Н или 10,6.



9. На склоне под углом α=30° к горизонту отпускают множество одинаковых кубиков с ребром d=1 см, разделенных одинаковыми промежутками d и расположенных в одну линию вдоль склона. Нижний кубик первоначально находится на краю склона и имеет скорость v=36,5 см/с, направленную вверх по склону, остальные кубики первоначально неподвижны. Склон снизу обрывается, сверху не ограничен. Сколько столкновений произойдет на склоне? Столкновения упругие, трения нет. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Возможное решение

(1) При упругом ударе тел одинаковой массы тела обмениваются импульсом, что следует из законов сохранения энергии и импульса.

(2) Представим, что склон неограниченно продолжается вниз: поскольку все кубики движутся с ускорением $g\sin\alpha = g/2$ вниз по склону, и вначале скорость не ударившихся кубиков мала по сравнению с v, и место соударений будет перемещаться вверх по склону, затем вниз, и, наконец, переместится в позицию ниже начала склона – эти столкновения не осуществятся. Скорости кубиков, не испытавших столкновение, $v_2 = -gt$, скорость нижнего кубика до столкновения $v_1 = v - gt$.

3) После первого столкновения $v_2 = v - gt$, $v_1 = -gt$. Относительная скорость первого и второго кубика до столкновения $v_{12} = v_2 - v_1 = -v$, аналогичная скорость для второго и третьего $v_{23} = v_3 - v_2 = 0$. После столкновения $v_{12} = 0; v_{23} = -v$.

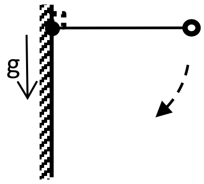
4) В любой момент времени расстояние между кубиком, испытавшим столкновение, и ближайшим кубиком, располагающимся выше, меняется со скоростью –v, а расстояния между остальными соседними кубиками не уменьшаются.

5) Между последовательными столкновениями проходит одинаковое время $\tau = d/v$.

6) В столкновении «n» участвует верхний n+1 – ый кубик, ранее не сталкивающийся и находящийся на расстоянии $S_n = 2nd - g\sin\alpha t^2/2 = 2nd - gt^2/4$ от края склона.

7) Поскольку столкновение произойдет через время τn, это расстояние $S_n = 2nd - n^2 g d^2/4v^2 > 0$. Из условия $S_n = 0$ находим $n_0 = 8v^2/gd \approx 10,66$. Столкновение n=10 произойдет выше нижней кромки склона, а n=11 ниже, и оно не осуществится, $S_{10} \approx 1,23$ см, так что снизу от 11-го кубика будет достаточно места для 10-го.

Ответ: 10.



10. Шарик прикрепили к вертикальной стене при помощи нити длины L = 1 м. Затем его отвели от стены, слегка натянув нить в горизонтальном направлении, и отпустили. На каком расстоянии от точки подвеса нити шарик ударился о стену, если нить выдерживает максимальное натяжение, в два раза превышающее вес шарика? Нить абсолютно жесткая и невесомая, сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Возможное решение

Предположим, что нить порвалась и скорость шарика в момент отрыва V, угол нити относительно стены α и масса шарика m, а сила натяжения нити $T = 2mg$.

1) Закон сохранения энергии $\frac{mV^2}{2} = mgL\cos\alpha$.

2) II закон Ньютона в радиальном направлении в точке отрыва: $\frac{mV^2}{L} = T - mg\cos\alpha$.

3) Из (1) и (2) получаем $\cos\alpha = T/3mg = 2/3$.

4) Начальные скорости после отрыва по горизонтали и вертикали: $V_x = V\cos\alpha, V_y = V\sin\alpha$ где $V = \sqrt{2gL\cos\alpha}$.

5) Время полета и искомое расстояние до точки подвеса в момент удара о стену $t = L\sin\alpha / V_x; Y = L\cos\alpha + V_y t + gt^2/2$.

6) Искомая величина $Y = L\cos\alpha\left(1 + tg^2\alpha\left(1 + 1/4\cos^2\alpha\right)\right)$.

Ответ: 1,97 м или 1,97.

№ задачи	**Ответ**
1	5; 7
2	12 час 19 мин 20 сек
3	20 м/с или 20
4	13; 2
5	25,5 км/час или 25,5
6	6,78 км/час или 6,78
7	0,00332 Дж или 0,00332
8	10,6 Н или 10,6
9	10
10	1,97 м или 1,97