

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2019-2020 г.г.
Заключительный этап 11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

Время написания 4 астрономических часа

11.1. Найти все решения системы уравнений в действительных числах:

$$\begin{cases} xy + z + t = 1, \\ yz + t + x = 3, \\ zt + x + y = -1, \\ tx + y + z = 1. \end{cases}$$

11.2. Пусть a, b, c - натуральные числа. Могут ли наибольшие общие делители пар чисел a и b , b и c , c и a равняться $30!+111$, $40!+234$ и $50!+666$ соответственно?

11.3. Найти максимальную длину горизонтального отрезка с концами на графике функции $y = x^3 - x$

11.4. Пусть точки O и I – центр описанной и вписанной окружностей треугольника ABC соответственно. Известно, что угол AIO прямой, а величина угла CIO равна 45° . Найти отношение длин сторон $AB:BC:CA$.

11.5. За одну *операцию* к любой из нескольких лежащих на столе кучек камней можно прибавлять столько же, сколько в ней уже содержится, из любой другой. Доказать, что любая начальная раскладка N камней по кучкам может быть собрана в одной куче в результате некоторого количества операций тогда и только тогда, когда N является степенью двойки.