Решения заданий 11 класса

11.1. Найти все решения системы уравнений в действительных числах:

$$\begin{cases} xy + z + t = 1, \\ yz + t + x = 3, \\ zt + x + y = -1, \\ tx + y + z = 1. \end{cases}$$

Ответ. $(1,0,-1,2)$.

Решение. Вычтем второе уравнение из первого, третье из второго, четвёртое из третьего, первое из четвёртого, разложим каждую разность на множители и получим: $(x-z)(y-1)=-2$, $(y-t)(z-1)=4$, $(z-x)(t-1)=-2$, $(y-t)(x-1)=0$. Из второго равенства $y-t\neq 0$, поэтому из четвёртого равенства $x=1$. Из первого и третьего равенств $x-z\neq 0$ и $y-1=-2=1-t$, откуда $y=2-t$. Подставим найденные выражения в первое и второе уравнения исходной системы, получим $z=-1, t=2$, откуда $y=0$. Таким образом, получаем единственное решение системы: $(1,0,-1,2)$.

Критерии проверки. Угадан ответ с проверкой: 1 балл. Сделаны вычитания уравнений и решение доведено до стадии $(x-z)(y-1)=-2,..$: 2 балла. Отсюда найден $x=1.$: ещё 1 балл.

11.2. Пусть a,b,c - натуральные числа. Могут ли наибольшие общие делители пар чисел a и b, b и c, c и a равняться $30!+111$, $40!+234$ и $50!+666$ соответственно?

Ответ. Нет, не могут.

Решение. Предположим, что указанная в условии ситуация возможна. Заметим, что числа 30!, 40! и 50! делятся на 9 очевидным образом, числа 234 и 666 делятся на 9 по признаку, так как их суммы цифр делятся на 9, а вот 111 делится на 3, но не делится на 9. Отсюда следует, что числа 40!+234 и 50!+666 делятся на 9, а число 30!+111 не делится на 9. Таким образом, наибольшие общие делители пар чисел b и c, c и a делятся на 9, откуда следует делимость на 9 чисел a и b Последнее влечёт делимость на 9 их наибольшего общего делителя, равного 30!+111, которое, как мы установили, на 9 не делится – противоречие. Следовательно, указанная в условии ситуация невозможна.

Критерии проверки. Замечена с обоснованием делимость НОДов пар чисел b и c, c и a и не делимость НОДа пары a и b на 9: 2 балла. Решение приведено без точного обоснования делимости на 9: снимаем 2 балла.

11.3. Найти максимальную длину горизонтального отрезка с концами на графике функции $y=x^3-x$

Ответ. 2.

Решение 1. Горизонтальный отрезок длины $a>0$ с концами на графике функции $y=x^3-x$ существует тогда и только тогда, когда уравнение $(x+a)^3-(x+a)=x^3-x$ имеет при данном значении параметра a хотя бы одно решение. Раскрывая скобки, приводя подобные и сокращая на $a>0$, получим квадратное уравнение $3x^2+3ax+a^2-1=0$, которое разрешимо при $D=12-3a^2\geq 0$, откуда $0<a\leq 2$. Следовательно, длина искомого отрезка не превосходит 2. При $a=2$ решением уравнения является $x=-1$, откуда следует, что длина 2 достигается для отрезка с концами (-1,0) и (1,0) на графике функции $y=x^3-x$.

Решение 2.

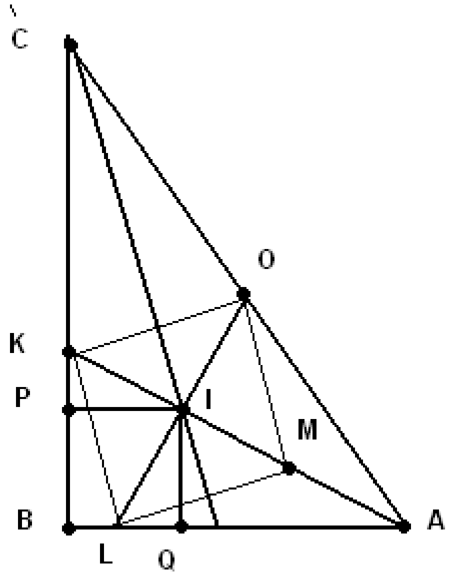
Как в решении 1, получаем уравнение $3x^2+3ax+a^2-1=0$, которое рассмотрим, как квадратное относительно a с параметром x: $a^2+3xa+3x^2-1=0$. Находим его корни $a_{1,2}=\dfrac{-3x\pm\sqrt{4-3x^2}}{2}$, ввиду положительности a рассматриваем только тот, что с плюсом: $a=\dfrac{\sqrt{4-3x^2}-3x}{2}$. Данная функция от x определена при $|x|\leq\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ и положительна при $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\leq x\leq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Её производная, равная

$a'(x) = -\frac{3x + 3\sqrt{4-3x^2}}{2\sqrt{4-3x^2}}$ обращается в ноль при $x=-1$, слева больше ноля, а справа – меньше. Следовательно, её значение максимально при $x=-1$ и равно $a_{\max}=2$. Действительно, в данном случае отрезок длины 2 соединяет на оси ОХ два корня $x_1=-1$ и $x_2=1$ уравнения $x^3-x=0$.

Критерии проверки. Приведён ответ 2 и пример отрезка такой длины: 1 балл. Отсутствие явного примера в решении: минус 2 балла.

11.4. Пусть точки O и I –центр описанной и вписанной окружностей треугольника ABC соответственно. Известно, что угол AIO прямой, а величина угла CIO равна 45°. Найти отношение сторон AB:BC:CA.

Ответ. 3:4:5



Решение. 1. Величина угла AIC равна $180^\circ - \frac{A+C}{2} = 90^\circ + \frac{B}{2} > 90^\circ$. Если бы луч IO лежал бы вне угла AIC, величина угла AIO равнялась бы сумме величин AIC и CIO и была бы больше 90 градусов, что противоречит условию. Следовательно, луч IO лежит внутри угла AIC, поэтому величина угла AIC равна сумме величин углов AIO и CIO, то есть 135 градусам. Значит, угол ABC – прямой и треугольник ABC является прямоугольным с гипотенузой AC, а точка O – середина стороны AC.

2. Обозначим точку пересечения биссектрисы AI со стороной BC за K. Углы CIO и CIK равны 45, следовательно прямые IO и IK симметричны относительно биссектрисы CI, то же самое верно и для прямых CA и CB. Значит, треугольники CIO и CIK равны и точки O и K симметричны относительно CI, а треугольник OIK – прямоугольный равнобедренный.

3. Продлим отрезок OI до пересечения со стороной AB в точке L, симметричной O относительно биссектрисы AI. Обозначим за M середину отрезка AI, по теореме, обратной теореме Фалеса, отрезки OM и CI параллельны, следовательно угол IOM равен углу OIC, то есть 45 градусам. Значит, треугольник OIM – прямоугольный равнобедренный и равен треугольникам OIK и KIL. Отсюда следует, что точки I и M делят отрезок AK на три одинаковых части.

4. Опустим из точки I перпендикуляры IP и IQ на стороны BC и AB соответственно, точки P и Q являются точками касания этих сторон со вписанной окружностью, четырёхугольник PIQB является квадратом. Углы KIL и PIQ прямые, значит углы PIK и QIL равны, отсюда следует равенство прямоугольных треугольников PIK и QIL. По теореме Фалеса длина KP=QL равна половине длины BP=BQ, а длина AQ вдвое больше длины BQ=BP.

Следовательно, длина стороны AB равна $AL+LB=\frac{6}{5}AL=\frac{6}{5}AO=\frac{3}{5}AC$. Из теоремы Пифагора $BC=\frac{4}{5}AC$. Следовательно, AB:BC:CA=3:4:5.

Второе решение. Пункт 1, точки M, P и Q те же, что как в первом решении, четырёхугольник PIQB является квадратом. В прямоугольном треугольнике AIO катет AI вдвое больше катета OI. Считаем длину OI равной единице, тогда площадь треугольника AIO равна 1, длина гипотенузы AO равна $\sqrt{5}$, а высота из вершины I равна $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Эта высота и отрезки IP и IQ равны, как радиусы вписанной окружности, поэтому $AQ=\sqrt{AI^2-IQ^2}=\sqrt{4-\frac{4}{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$. Следовательно, $AB=AQ+QB=\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$, и $AB:AC=AB:2\cdot AO=\frac{6}{\sqrt{5}}:2\sqrt{5}=3:5$. Из теоремы Пифагора $BC:AC=4:5$, откуда AB:BC:CA=3:4:5.

Критерии проверки. Обоснование того, что луч IO лежит внутри угла AIC, и величина угла AIC равна сумме величин углов AIO и CIO: 1 балл. Доказательство того, что угол ABC – прямой: 2 балла (включают предыдущий пункт).

11.5. За одну *операцию* к любой из нескольких лежащих на столе кучек камней можно прибавлять столько же, сколько в ней уже содержится, из любой другой. Доказать, что любая начальная раскладка N камней по кучкам может быть собрана в одной куче в результате некоторого количества операций тогда и только тогда, когда N является степенью двойки.

Доказательство. Для каждой кучки назовём её *показателем* максимальную степень двойки, на которую делится число содержащихся в ней камней, она может быть равна $1=2^0$. Рассмотрим поведение показателей кучек, участвующих в перекладывании. После перекладывания камней из кучки с $2^a(2k+1)$ камнями в кучку с $2^b(2l+1)$ камнями в первой остаётся $2^a(2k+1)-2^b(2l+1)$ камней, а во второй становится $2^{b+1}(2l+1)$ камней. Если $a=b$, то $2^a(2k+1)-2^b(2l+1)=2^{a+1}(k-l)$, поэтому оба показателя возрастут. Если $a\neq b$, то $2^a(2k+1)-2^b(2l+1)=2^c(2m+1)$, где $c=\min\{a,b\}$. При этом минимальный в данной паре кучек показатель сохраняется, а второй гарантированно становится больше минимального. Заметим, что количество кучек с минимальным среди всех показателем при произвольном перекладывании либо уменьшается на 2, либо не меняется.

Рассмотрим произвольную раскладку $N=2^t$ камней по более, чем одной кучке. В ней число кучек с минимальным показателем $2^s, s<t$ будет чётным. Действительно, общее число камней $N=2^t$ и сумма количеств камней в не минимальных кучках делятся на 2^{s+1} поэтому сумма количеств камней в минимальных кучках тоже делится на 2^{s+1}, значит, их количество делится на

2. Если в раскладке есть хотя бы две кучки, разбиваем все кучки с минимальным показателем на пары, выполняем в каждой перекладывание из большей в меньшую и получаем раскладку с большим минимальным показателем, чем рассматриваемая. Проделав эту процедуру не более, чем t раз, получим раскладку с минимальным показателем t, то есть – с единственной кучкой из $2^t = N$ камней.

Пусть теперь $N = 2^t(2k+1), k \geq 1$ не является степенью двойки. Рассмотрим любой процесс сборки некоторой раскладки N камней по кучкам в одну и произведём его в обратном порядке, посредством процедур перекладывания, обратных к исходным, когда половина одной из кучек перекладывается в другую. При этом в обратном процессе количество камней в первой кучке (она же последняя в исходном процессе сборки) и всех получающихся на каждом шаге будет делиться на нечётное число $2k+1$. Следовательно, любая раскладка, в которой есть кучка из числа камней, не делящегося на $2k+1$, не может быть собрана в одной кучке. В частности, не может быть собрана в одну раскладка {1, N-1} по двум кучкам.

Замечание 1. В случае $N = 2^t(2k+1)$ можно предложить другое решение того, что раскладка {1, N-1} по двум кучкам не может быть собрана в одну. Этого достаточно для доказательства *необходимости* в условии задачи, то есть того, что любая начальная раскладка N камней по кучкам может быть собрана в одной куче только тогда, когда N является степенью двойки.

Докажем по индукции, что после k перекладываний количества камней в кучках имеют вид $\{2^k - a_k \cdot N, (a_k+1)\cdot N - 2^k\}$ для некоторого целого числа $a_k \geq 0$. База индукции при $k=0$ очевидна: $\{1, N-1\} = \{2^0 - 0\cdot N, 1\cdot N - 2^0\}$, то есть $a_0 = 0$. Шаг индукции: либо мы перекладываем камни из правой кучки в левую, тогда в левой станет $2^{k+1} - 2a_k N$, а в правой останется $(2a_k+1)N - 2^{k+1}$ камней, при этом $a_{k+1} = 2a_k$, либо мы перекладываем камни из левой кучки в правую, тогда в левой останется $2^{k+1} - (2a_k+1)N$, а в правой станет $2(a_k+1)N - 2^{k+1}$ камней, при этом $a_{k+1} = 2a_k + 1$.

Если после некоторого k-ого перекладывания раскладки {1, N-1} останется всего одна кучка, то число камней в другой станет равным 0, следовательно, выполнится равенство одно из равенств $2^k - a_k \cdot N = 0$ или $(a_k+1)\cdot N - 2^k = 0$. В обоих случаях N будет делителем числа 2^k, то есть тоже степенью двойки - противоречие с тем, что в рассматриваемом случае $N = 2^t(2k+1)$. Следовательно, при любом N, отличном от степени двойки, раскладка {1, N-1} не может быть собрана в одну кучку.

Замечание 2. Объединяя оба случая $N = 2^t$ и $N = 2^t(2k+1)$, получаем доказательство более общего утверждения: раскладка N камней может быть собрана в одной кучке тогда и только тогда, когда количество камней в каждой её кучке делится на набольший нечётный делитель N.

Критерии проверки. Отдельно каждая из двух частей решения, необходимости и достаточности условия $N = 2^t$ для сборки, при отсутствии второй части, оцениваются в 3 балла.