Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике
Заключительный этап **2018-2019 г.г.**
11 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

11.1. Последовательность чисел $a_n, n = 1,2,...12$ такова, что, $a_1 = 1, a_{12} = 2$. $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+1}{a_n}$ для всех натуральных $n = 1,2,...,11$. Найти a_4.

11.2. Найти все натуральные числа n, которые можно представить в виде суммы $n = x + y + (x,y) + [x,y]$ для некоторых натуральных чисел x и y. Здесь (x,y) и $[x,y]$ обозначают наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел x и y соответственно.

11.3. Вася и Петя по очереди красят в синий и красный цвета клетки доски размера 10 на 10 клеток. Вася красит в синий любую не окрашенную на момент его хода клетку, у которой ни одна из соседних по стороне клеток уже не окрашена в синий цвет, а Петя красит в красный любую не окрашенную на момент его хода клетку. Вася ходит первым, какое максимальное количество клеток он всегда может окрасить в синий цвет, как бы ни мешал ему Петя?

11.4. В прямоугольном треугольнике ABC точка M – середина гипотенузы BC, а точки P и T делят катеты AB и AC в отношении AP:PB=AT:TC=1:2. Обозначим за K точку пересечения отрезков BT и PM, за E – точку пересечения отрезков CP и MT, и за O - точку пересечения отрезков CP и BT. Доказать, что четырёхугольник OKME – вписанный.

11.5. Найти все решения системы уравнений в действительных числах:

$$x^2 + x - 1 = y, \;\; y^2 + y - 1 = z, \;\; z^2 + z - 1 = x.$$