

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике

Первый этап

2018-2019 г.г.

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Параболы P и S являются графиками функций $y = kx^2$ и $y = kx^2 + b, b > 0$ соответственно. Доказать, что любая хорда параболы P , касающаяся параболы S , делится этой точкой касания на два равных отрезка.

11.2. Найти количество пятизначных чисел, у которых в записи содержатся две цифры, одна из которых делится нацело на другую.

11.3. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки M и P такие, что отрезок PM параллелен стороне BC . Из точки M восстановлен перпендикуляр к прямой AB , а из P восстановлен перпендикуляр к AC , их точку пересечения обозначена за T . Доказать, что точки A, T и O – центр описанной окружности треугольника ABC – лежат на одной прямой.

11.4. Пусть a, b, c произвольные числа из интервала $(0,1)$. Доказать, что одно из трёх произведений $a(1-b), b(1-c), c(1-a)$ всегда не больше $1/4$.

11.5. Найти все пары натуральных чисел a и b такие, что оба числа $\frac{a^2 + b}{b^2 - a}$ и $\frac{b^2 + a}{a^2 - b}$ являются целыми.