Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике
Второй этап 2018-2019 г.г.
11 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

11.1.. Какой цифрой может заканчиваться число $f(x)=[2x]+[3x]+[5x]$, где x - произвольное положительное действительное число? Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.
Ответ. Любой цифрой от 0 до 7 включительно.
Решение. Обозначим $x=[x]+a$, где $0\leq a<1$- дробная часть x. Тогда легко понять, что $f(x)=[2x]+[3x]+[5x]=10[x]+[2a]+[3a]+[5a]$, поэтому от целой части x последняя цифра не зависит. Рассмотрим возможные значения его дробной части, разобьём отрезок от 0 до 1 сначала на два равных полуоткрытых интервала: от 0 до 1/2. и от 1/2 до 1, на первом из них $[2a]$ равно 0. на втором 1. Аналогично, значения $[3a]$ на полуоткрытых интервалах от 0 до 1/3, от 1/3 до 2/3, от 2/3 до 1 равны 0,1 и 2 соответственно, а значения $[5a]$ на полуоткрытых интервалах от 0 до 1/5, от 1/5 до 2/5, …, от 4/5 до 1 равны 0,1,…,4 соответственно. Отсюда легко получить, что значения суммы $[2a]+[3a]+[5a]$ на восьми полуоткрытых интервалах $\left[0,\frac{1}{5}\right),\left[\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right),\left[\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right),\left[\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right),\left[\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right),\left[\frac{3}{5},\frac{2}{3}\right),\left[\frac{2}{3},\frac{4}{5}\right),\left[\frac{4}{5},1\right)$равны соответственно 0,1,2,3,4,5,6,7.
Критерии оценивания. Доказано, что последняя цифра x зависит только от дробной части x: 2 балла. Доказано, чем оканчиваются числа $[2a],[3a]$ и $[5a]$ в

зависимости от интервала:4 балла. Только приведены примеры, когда последние цифры равны 0,1,2,3,4,5,6,7: 1 балл.

11.2..Найти все целые числа n такие, что число $15n^2-2n-1$ является степенью двойки.

Ответ. $n=3$ и $n=-1$.

Решение. Пусть n удовлетворяет условию задачи, разложим $15n^2-2n-1=(5n+1)(3n-1)$, тогда оба сомножителя $5n+1$ и $3n-1$ тоже являются степенями двойки, как легко видеть, различными и отличными от 1 и -1 при $n\neq 0,-1$. Случай $n=-1$ очевидно, подходит, а $n=0$ не подходит. Из чётности чисел $5n+1$ и $3n-1$ следует нечётность n. Сложим $5n+1$ и $3n-1$ и получим, что при $n>0$ число $8n$, а при $n<0$ число $-8n$ является суммой двух различных неединичных степеней двойки и делится ровно на 8. Отсюда следует, что минимальная из этих степеней, совпадающая с $3n-1$ при $n>0$ или $-3n+1$ при $n<0$, равна 8, значит $n=3$ - единственное отличное от $n=-1$ решение задачи.

Критерии оценивания. Доказано, что $5n+1$ и $3n-1$ являются степенями двойки: 3 балла. Доказано, что эти степени различны и отличны от 1:1 балл. Доказано, что n нечётно: 1 балл. Доказано, что минимальная из этих степеней, совпадающая с $3n-1$, равна 8: 2 балла. Утеряно решение $n=-1$: минус 2 балла.

11.3. Найти максимальное натуральное число А такое, что при любой расстановке всех натуральных чисел от 1 до 100 включительно в ряд в некотором порядке всегда найдутся десять последовательно расположенных чисел, сумма которых не меньше А..

Ответ. 505.

Решение. Сумма всех чисел от 1 до 100 равна 5050. Разобьём 100 чисел, стоящих в ряд, на 10 отрезков по 10 чисел, очевидно, что сумма чисел в одном из отрезков не меньше 505, следовательно, А не меньше 505.

Покажем, что среди чисел, стоящих в следующем порядке: 100,1,99,2,98,3,…,51,50, нет десяти подряд идущих, сумма которых больше 505. Этим будет доказано, что А не больше 505 и, с учётом сказанного выше, что А=505.

Воспользуемся тем, что при такой расстановке все числа на нечётных местах монотонно убывают, а на чётных – монотонно возрастают, и сумма числа на нечётном месте и следующего за ним всегда равна 101. Тогда сумма любых 10 последовательных чисел, первое из которых стоит на нечётном месте всегда равна 505=5*101. Сумма отрезка из 10 последовательных чисел, первое из которых стоит на чётном, месте равна 505 минус самое правое число из тех чисел, что левее этого отрезка плюс последнее число этого отрезка. Два упомянутых числа стоят на нечётных местах, различающихся на 10, поэтому первое из них больше второго на 5, следовательно, вся сумма равна 500, что меньше 505.

Критерии оценивания. Доказательство того, что А не меньше 505: 3 балла.
Нет обоснования нижней границы А=505: –2 балла или -1 балл.
Пример, доказывающий, что А не больше 505: 4 балла.
недостаточная обоснованность примера: -2 балла.

11.4. На основании АС равнобедренного треугольника АВС взята произвольная точка М, через неё проведены прямые, параллельные боковым сторонам треугольника, пересекающие стороны АВ и ВС в точках Р и Т соответственно. Доказать, что точка Е, симметричная М относительно прямой РТ, лежит на описанной окружности треугольника АВС.

Доказательство. Обозначим за О центр описанной окружности треугольника АВС и за Н – середину основания АС. В силу симметрии считаем, что М лежит на отрезке АН.

Сначала покажем, что точка О лежит ниже, ближе к основанию, чем прямая РТ. Отрезок ВМ короче диаметра описанной окружности, поэтому расстояние от В до середины S отрезка ВТ короче радиуса описанной окружности. В силу расположения М, ВР длиннее ВТ и расстояние от В до точки пересечения РТ и ВН меньше, чем BS, следовательно, оно меньше радиуса описанной окружности, равного ВО. Значит, О лежит ниже РТ.

Докажем сначала, что треугольники АРО и ВТО равны. В силу построения АР=РМ, как боковые стороны равнобедренного треугольника АРМ и РМ=ВТ, как противоположные стороны параллелограмма МРВТ, поэтому АР=ВТ. Стороны ОА и ОВ равны, как радиусы описанной окружности треугольника АВС. В равнобедренном треугольнике АОВ угол ОАР=ОАВ равен .90 минус половину угла АОВ, который, как центральный, равен удвоенному вписанному углу С. Следовательно, угол ОАР равен 90-С, что, очевидно, равно углу ОВТ=ОВС=90-С из прямоугольного треугольника СВН. Значит, треугольники АРО и ВТО равны по двум сторонам ОА=ОВ и АР=ВТ и углу ОАР=ОВТ между ними. В частности, отсюда следует равенство отрезков ОР и ОТ.

Теперь покажем, что и треугольник ОРЕ равен треугольнику ОТВ, откуда будет следовать равенство сторон ОЕ и ОВ и принадлежность точки Е описанной окружности треугольника АВС. Действительно, по построению РЕ=РМ=РА=ВТ и ОР=ОТ по только что доказанному. По построению угол ТРЕ равен углу ТРМ, который равен углу РТВ в параллелограмме МРВТ. Равенство углов ОРТ и ОТР следует из равнобедренности треугольника ОРТ. Теперь из равенств углов ОРЕ=ОРТ+ТРЕ=ОТР+РТВ=ОТВ следует равенство треугольников ОРЕ и ОТВ

Критерии оценивания. Доказано равенство ОР и ОТ: 3 балла. Не доказано, что О лежит ниже РТ: минус 1 балл.

11.5. Последовательность положительных действительных чисел $a_n, n=1,2,3,\ldots$ такова, что $a_n^{\,2} < a_n - a_{n+1}$. Докажите, что $a_n < \frac{1}{n}$ для всех $n=1,2,3,\ldots$

Доказательство. Запишем неравенство $a_n^2 < a_n - a_{n+1}$ в виде $a_{n+1} < a_n - a_n^2$. Квадратичная функция $f(x) = x - x^2$ положительна при $0 < x < 1$, поэтому из положительности a_{n+1} следует $0 < a_n < 1$ при всех $n = 1,2,3,\ldots$, в частности, и при $n = 1$. Это доказывает утверждение задачи в случае $n = 1$.

Максимальное значение функции $f(x) = x - x^2$ на интервале $0 < x < 1$ равно ¼ при $x = \frac{1}{2}$, поэтому $a_n \le \frac{1}{4}$ при всех $n = 2,3,\ldots$,. Это доказывает, в частности, утверждение задачи для $n = 2,3,4$.

Далее воспользуемся методом математической индукции, в качестве базы индукции используем уже доказанные случаи $n = 1,2,3,4$. Пусть утверждение задачи выполнено для $a_n, n > 2$. На интервале $0 < x < a_n < \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$ функция $f(x) = x - x^2$ монотонно возрастает, следовательно $a_{n+1} < a_n - a_n^2 = f(a_n) < f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n}) = \frac{n-1}{n^2} < \frac{1}{n+1}$, что доказывает справедливость шага индукции.

Критерии оценивания. Доказано неравенство $0 < a_n < 1$: 1 балл.. Доказано неравенство $a_n \le \frac{1}{4}$: 2 балла. Сделан шаг индукции: 4 балла.