Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике

Первый этап 2018-2019 г.г.

11 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

11.1. Параболы P и S являются графиками функций $y = kx^2$ и $y = kx^2 + b, b > 0$ соответственно. Доказать, что любая хорда параболы P, касающаяся параболы S, делится этой точкой касания на два равных отрезка.

Доказательство. Пусть хорда AB параболы P касается параболы S в точке M с координатами $(x_0, kx_0^2 + b)$. Выпишем уравнение прямой AB: $y = 2kx_0(x - x_0) + kx_0^2 + b = 2kx_0x - kx_0^2 + b$, абсциссы x_1 и x_2 точек A и B её пересечения с параболой P являются решениями уравнения $2kx_0x - kx_0^2 + b = kx^2$, то есть квадратного уравнения $kx^2 - 2kx_0x + kx_0^2 - b = 0$ По теореме Виета сумма корней этого уравнения равна $x_1 + x_1 = -\frac{-2kx_0}{k} = 2x_0$. Следовательно, середина отрезка AB имеет абсциссу $\frac{x_1 + x_2}{2} = x_0$ и совпадает с M.

Критерии оценивания. Верно выписано уравнение касательной к S: 2 балла.
Верно записано уравнение для нахождения абсцисс точек A и B: 1 балл.

11.2. Найти количество пятизначных чисел, содержащих в записи две цифры, одна из которых делится нацело на другую.

Ответ. 89760=$9 \cdot 10^4 - 2 \cdot 5!$.

Решение. Подсчитаем количество пятизначных чисел, у которых ни одна из цифр записи не делится нацело ни на одну другую, а потом вычтем полученное число из общего количества пятизначных чисел, равного 90000, получим ответ задачи.
Заметим, что число, ни одна из цифр записи которого не делится нацело ни на одну другую, не содержит в записи 0 (0 делится на любую цифру), 1 (любая цифра делится на 1) и не содержит одинаковых цифр (они всегда делятся друг на друга). Следовательно, минимальная цифра такого пятизначного числа может равняться 2,3,4 или 5. Если это 2, то остальные четыре цифры нечётны, это в точности 3,5,7 и 9, но 9 делится на 3. Если это 3, остальные четыре цифры могут равняться в точности только 4,5,7,8, но 8 делится на 4. Остаются только числа, составленные из цифр 4,5,6,7,9 или 5.6,7,8,9. В каждом случае есть по 5!=120 вариантов всевозможных расстановок этих цифр, итого 240 чисел. Следовательно, искомых в задаче чисел 90000-240=89760.

Критерии оценивания. Идея применения принципа вычитания: 3 балла. Верный подсчёт количества 5-значных чисел: 1 балл. Верный подсчёт количества 5-значных чисел, у которых ни одна из цифр записи не делится нацело ни на одну другую: 3 балла. Если в решении не учитывается делимость 0 на любую цифру или делимость любой цифры на 1 или равных цифр друг на друга: минус 3 балла.

11.3. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки M и P такие, что отрезок PM параллелен стороне BC. Из точки M восстановлен перпендикуляр к прямой AB, а из P восстановлен перпендикуляр к AC, их точку пересечения обозначена за T. Доказать, что точки A, T и O – центр описанной окружности треугольника ABC – лежат на одной прямой.

Доказательство. Утверждение задачи равносильно тому, что угол CAO равен углу CAT. Сначала рассмотрим случай, когда угол ABC не больше 90 градусов. 1) Найдём угол CAO. В описанной окружности треугольника ABC угол ABC является вписанным, а угол AOC –

соответствующим ему центральным, поэтому величина АОС равна удвоенной величине АВС. Из равнобедренного треугольника АОС получаем, что величина САО равна 90-АВС.
2) Найдём угол САТ. Заметим, что четырёхугольник AMTP является вписанным в окружность с диаметром АТ, поэтому вписанные углы САТ=РАТ и РМТ равны, как опирающиеся на общую хорду РТ. А угол РМТ равен углу РМВ минус 90 градусов, С учётом параллельности МР и ВС, РМВ=180 – АВС, следовательно, САТ=РАТ=(180-АВС)-90=90-АВС. Таким образом, углы САО и САТ равны, откуда следует утверждение задачи.
В случае, когда величина угла АВС больше 90 градусов, рассуждения проводятся по той же схеме со следующими поправками: величина САО равна АВС-90 и САТ=РАТ=РМТ=АВС-90.
Критерии оценивания. Нахождение угла САО: 1 балл. Обоснование вписанности четырёхугольника АМТР: 2 балла. Равенство РАТ=РМТ = углу РМВ минус 90 градусов: 1 балл. Равенство РМВ=180 – АВС: 1 балл. Не рассмотрен случай, когда величина угла АВС больше 90 градусов: снимаем 1 балл.

11.4. Пусть a,b,c произвольные числа из интервала $(0,1)$. Доказать, что одно из трёх произведений $a(1-b), b(1-c), c(1-a)$ всегда не больше 1/4.

Доказательство. Квадратичная функция $f(x)=x(1-x)$ достигает максимума, равного $\frac{1}{4}$, в точке $x=\frac{1}{2}$. Следовательно, произведение $a(1-a)\cdot b(1-b)\cdot c(1-c)$ не превосходит $(\frac{1}{4})^3=\frac{1}{64}$. Предположим, что каждое из трёх произведений $a(1-b), b(1-c), c(1-a)$ больше ¼, перемножив их, получим $a(1-b)\cdot b(1-c)\cdot c(1-a)=a(1-a)\cdot b(1-b)\cdot c(1-c)>(\frac{1}{4})^3=\frac{1}{64}$ - противоречие. Таким образом, одно из них всегда не больше ¼.

Критерии оценивания. Доказательство того, что $a(1-a)\cdot b(1-b)\cdot c(1-c)\le\frac{1}{64}$: 4 балла.

11.5. Найти все пары натуральных чисел a и b такие, что оба числа $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ и $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ являются целыми.
Ответ. $(a,b)=(2,2),(3.3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)$ - шесть пар.
Решение. При замене a на b и b на a дроби в условии меняются местами, поэтому можно сразу предположить, что $a\le b$, добавив потом решения, симметричные полученным. При этом случай $a=b=1$ исключается ввиду неравенства $b^2-a\ne 0$, поэтому $b^2-a>0$ и первая дробь должна являться натуральным числом. Значит, $a^2+b=n(b^2-a)\ge b^2-a$, то есть $a+b\ge b^2-a^2=(a+b)(b-a)$, делим на натуральное число $a+b>0$, получаем $b-a\le 1$. С учётом неравенства $a\le b$ получим $a=b$ либо $b=a+1$.
В первом случае $\frac{a^2+b}{b^2-a}=\frac{a^2+a}{a^2-a}=\frac{a+1}{a-1}=1+\frac{2}{a-1}$ - натуральное число, и $a-1$ делит 2, откуда $a=2$ или $a=3$. Вторая дробь при этом равна первой, поэтому оба варианта подходят. Получаем здесь два ответа $a=b=2$ и $a=b=3$.
Во втором случае $\frac{a^2+b}{b^2-a}=\frac{a^2+a+1}{a^2+a+1}=1$, $\frac{b^2+a}{a^2-b}=\frac{a^2+3a+1}{a^2-a-1}=1+\frac{4a+2}{a^2-a-1}$, откуда $4a+2$ делится на a^2-a-1, последнее число является натуральным при натуральном $a\ge 2$, так как минимальное значение этой квадратичной функции достигается при $a=\frac{1}{2}$, она возрастает при $x\ge\frac{1}{2}$ и положительна при $a=2$. Следовательно, должно быть $4a+2\ge a^2-a-1$, то есть

$a^2-5a-3\le 0$. Решая квадратичное неравенство, получаем $a\in(\frac{5-\sqrt{37}}{2},\frac{5+\sqrt{37}}{2})$, откуда $a=1,2,3,4,5$, проверяем подстановкой, $a=1,2$ подходят, а $a=3,4,5$ - нет. Получаем ещё два ответа $a=1,b=2$ и $a=2,b=3$. Отметим, что в первом из этих случаев вторая дробь будет целым числом –5, что разрешено условием. Остаётся добавить симметричные решения $a=2,b=1$ и $a=3,b=2$, .и получим полный ответ: $(a,b)=(2,2),(3.3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)$ - всего шесть пар решений.

Критерии оценивания. Верно получено, что $a=b$ либо $b=a+1$.: 3 балла. Найдены только решения с $a=b$: 2 балла. Найдены только решения с $a+1=b$: 2 балла. Забыли добавить симметричные решения: минус 1 балл. Решения $a=1,b=2$ и $a=2,b=1$ ошибочно исключены ввиду отрицательности одной из дробей в условии: минус 2 балла. Отсутствие проверок в случаях $a=1,b=2$ и $a=2,b=3$. снимаем 1 балл.