Всесибирская открытая олимпиада школьников 2017-2018 г.г. по математике

Заключительный этап **11 класс** **18.02.2018**

Каждая задача оценивается в 7 баллов Время выполнения заданий олимпиады: 4 астрономических часа

11.1. Пусть $a^2+b^2=c^2+d^2=1$ и $ac+bd=0$ для некоторых действительных чисел a, b, c, d . Найти все возможные значения выражения $ab+cd$.

11.2. Решить уравнение: $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=2$.

11.3. Может ли сумма объёма, длин всех рёбер и площадей всех граней некоторого прямоугольного параллелепипеда, длины рёбер которого являются целыми числами, равняться 866?

11.4 В множестве X из 17 элементов выделено семейство из N различных непустых подмножеств таких, что каждый элемент множества X содержится ровно в двух подмножествах из этого семейства. Каково максимальное значение N? Найдите число всех возможных различных типов таких семейств для максимального N. Два семейства подмножеств имеют различные типы, если не получаются друг из друга перестановкой элементов X.

11.5. Пусть A и B — две различные фиксированные точки окружности, C — произвольная точка этой окружности, отличная от A и B, и MP — перпендикуляр, опущенный из середины M хорды BC к хорде AC. Доказать, что прямые PM при любом выборе C проходят через некоторую общую точку T.