Каждая задача каждого класса оценивается из 7 баллов

11 класс

11.1. В каждой из четырёх волейбольных команд по шесть игроков, среди которых

обязательно есть капитан и разыгрывающий, причём это разные люди. Сколькими способами из этих четырёх команд можно составить сборную из шести игроков, среди которых должны быть хотя бы по одному игроку каждой команды и обязательно пара капитан — разыгрывающий хотя бы из одной команды?

Ответ. 9720.

Решение. Случай 1. Из одной из команд выбраны три игрока, включая капитана и разыгрывающего, а из остальных трёх — по одному. Выбор команды делается четырьмя способами, выбор третьего игрока из неё — ещё четырьмя способами и выбор трёх игроков из оставшихся команд — ещё $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ способами, в итоге получаем $4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 16 \cdot 216 = 3456$ возможностей для данного случая.

Случай 2. Из двух команд выбрали по два игрока, причём хотя бы из одной — капитана и разыгрывающего, из остальных двух команд — по одному игроку. Эту пару команд можно выбрать $C_4^2 = 6$ способами, выбрать из них по паре игроков можно $C_6^2 \cdot C_6^2$ способами. При этом нужно исключить $(C_6^2 - 1) \cdot (C_6^2 - 1)$ выборов, когда ни в одной из двух команд не будут выбраны одновременно капитан и разыгрывающий, итого получим $2 \cdot C_6^2 - 1 = 29$ способов. Осталось $6 \cdot 6 = 36$ способов выбрать ещё по одному игроку из двух оставшихся команд, всего получаем $6 \cdot 29 \cdot 36 = 6264$ способов в этом случае. Итого 6264 + 3456 = 9720 - ответ задачи.

Критерии проверки. Сведение решения к случаям 1 и 2: 1 балл. Рассмотрение каждого из случаев 1 и 2: 3 балла.

11.2. Докажите, что уравнение $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)=0$ при любых не совпадающих одновременно значениях a, b, c имеет два различных корня.

Доказательство. Первый способ. Раскроем в левой части скобки и приведём подобные: $3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + ac + bc = 0$. Дискриминант уравнения равен: $4\left((a+b+c)^2 - 3(ab+ac+bc)\right) = 4(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$. последнее выражение несложно преобразуется к виду: $2\left((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right)$. Полученная сумма всегда неотрицательна и равна нулю тогда и только тогда, когда $a=b=c$.

Второй способ. Без ограничения общности можно считать, что $a \le b \le c$ и что одно из двух неравенств строгое. Обозначим выражение в левой части за $f(x)$.

Если $a<b<c$, то $f(a)=(a-b)(a-c)>0, f(b)=(b-a)(b-c)<0, f(c)=(c-a)(c-b)>0$ и непрерывная функция $f(x)$ имеет по одному корню на интервалах (a, b) и (b, c).

Если $a=b<c$, то $f(a)=0, f(c)=(c-a)^2>0$, один корень $f(x)$ совпадает с a. При этом $f(x)=(x-a)(3x-a-2c)$ и второй корень равен $\frac{a+2c}{3}$, что совпадает с a тогда и только тогда, когда $a=c$ и значения всех трёх переменных совпадают, что противоречит условию. Аналогично разбирается случай $a<b=c$.

Критерии проверки. Если во втором решении не рассмотрен случай $a=b<c$ или $a<b=c$: снимаем 3 балла.

11.3. В футбольном турнире участвовали 17 команд, каждая из которых сыграла с каждой из остальных по одному разу. Могло ли у каждой команды число одержанных ею побед равняться числу матчей, сыгранных ею вничью?

Ответ. Нет, не могло.

Решение. Предположим противное, что у каждой команды число одержанных ею побед равняется числу матчей, сыгранных ею вничью. Найдём сумму S количеств всех побед, ничьих и поражений всех команд. В этой сумме общее число всех одержанных побед будет равно общему числу всех поражений и оба этих количества, по предположению, равны общему числу всех ничьих. Отсюда следует, что S должно делиться на 3, однако оно равно удвоенному числу всех сыгранных матчей, то есть $17 \cdot 16 = 272$ и не делится на 3 —

противоречие. Следовательно, предположение неверно и не могло у каждой команды число одержанных ею побед равняться числу матчей, сыгранных ею вничью.

Критерии проверки. Показано, что общее число всех одержанных побед будет равно общему числу всех поражений: 2 балла. Показано, что оба этих количества равны общему числу всех ничьих.: 3 балла. Проведено суммирование количеств всех побед, ничьих и поражений всех команд и показано, что оно не делится на 3: 2 балла.

11.4. В треугольнике ABC взята точка P такая, что сумма углов PBA и PCA равна сумме углов PBC и PCB. Докажите, что расстояние от вершины A до точки P не меньше расстояния от A до точки I - центра вписанной в ABC окружности, и если эти расстояния равны, то P совпадает с I.

Доказательство. Из условия следует, что сумма углов PBA и PCA равна сумме углов PBC и PCB и что обе они равны полусумме углов ABC и ACB. Отсюда величина угла BPC равна 90 плюс половина угла BAC, что совпадает с величиной угла BIC. Последнее означает, что точка P лежит на описанной окружности треугольника BIC.

Докажем, что центр описанной окружности треугольника BIC совпадает с точкой M пересечения биссектрисы AI и описанной окружности треугольника ABC (это хорошо известная «лемма о трезубце»). Покажем, что треугольники BMI и CMI являются равнобедренными с равными MC, MB и MI. Действительно, в треугольнике CMI угол CMI, равный CMA, равен углу ABC, как вписанный в описанную окружность треугольника ABC и опирающийся на хорду AC. Угол MCI состоит из BCI, равного половине ACB и BCM, равного половине BAC, как вписанный в описанную окружность треугольника ABC и опирающийся на хорду BM. Сумма этих углов равна полусумме ACB и BAC, то есть 90 минус половина угла ABC. Следовательно, угол MIC равен разности 180 и суммы CMI и MCI, что так же равно 90 минус половина угла ABC, поэтому .углы MIC и MCI равны.

Аналогично доказывается равенство углов MIB и MBI. Следовательно, длины MC, MB и MI равны, поэтому M — центр описанной окружности треугольника BIC. Ближайшей к A точкой этой окружности будет её пересечение с отрезком AM, то есть точка I. Следовательно, расстояние от A до P, лежащей на этой окружности, не меньше длины AI, и равно ей только при совпадении P и I, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. Показано, что P лежит на описанной окружности треугольника BIC: 2 балла. Доказано, что I — ближайшая к а точка этой окружности: 5 баллов.

11.5. При каком минимальном натуральном n найдутся n различных натуральных чисел $s_1, s_2, \dots, s_n$ таких, что $(1-\frac{1}{s_1})(1-\frac{1}{s_2})\dots(1-\frac{1}{s_n})=\frac{7}{66}$?

Ответ. $n=9$ **.**

Решение. Можно считать, что $1<s_1<s_2<\dots<s_n$, тогда для произвольного $k=1,\dots,n$ выполняется неравенство $s_k \ge k+1$. Следовательно, $\frac{7}{66}=(1-\frac{1}{s_1})(1-\frac{1}{s_2})\dots(1-\frac{1}{s_n})\ge(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\dots(1-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\dots\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$, откуда $n\ge 9$.

Пример девяти чисел, удовлетворяющих условию: 2,3,4,5,6,8,9,10,11.

Критерии проверки. Оценка $n\ge 9$: 5 баллов. Пример девяти чисел, удовлетворяющих условию: 2 балла.