11 класс *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

11.1. Два лыжника стартовали из одной точки друг за другом с интервалом 9 минут. Второй лыжник догнал первого в 9 км от точки старта. Дойдя до отметки «27 км», второй лыжник развернулся и пошёл обратно, встретив первого на расстоянии 2 км от точки поворота. Найти скорость второго лыжника.

Ответ. 15 км в час**.**

Решение. Обозначим скорости первого и второго лыжников за x и y километров в минуту соответственно. Из условия получаем: $\frac{9}{y}+9=\frac{9}{x},\frac{29}{y}+9=\frac{25}{x}$, вычитая первое уравнение из второго, имеем $\frac{20}{y}=\frac{16}{x}$, значит $x=\frac{4}{5}y$. Подставляя в первое, получаем $y=\frac{1}{4}$ км в минуту., что равно 15 км в час. Второй лыжник бежит со скоростью 12 км в час.

Критерии проверки. Верное составление системы уравнения: 3 балла.

11.2. Могут ли биссектрисы двух соседних внешних.углов треугольника (примыкающих к некоторой его стороне) пересекаться на его описанной окружности?

Ответ. Не могут.

Решение. Возьмём соседние внешние углы треугольника ABC, примыкающие к его стороне BC, обозначим их точку пересечения их биссектрис за P. Обозначив величины углов треугольника при вершинах B и C самими этими буквами, получим, что величины углов PBC и PCB равны 90 — B/2 и 90 — C/2 соответственно, а величина угла BPC равна B/2 + C/2 = 90 – A/2. Однако, если бы точка P лежала на описанной окружности треугольника ABC, то четырёхугольник ABPC был бы вписанным и сумма его противоположных углов BAC и BPC равнялась бы 180 = A +90 - A /2 = 90 + A/2, откуда A=180 градусов, что невозможно.

Критерии проверки. Найдена величина угла BPC: 2 балла.

11.3. Три действительных числа таковы, что модуль каждого из них не меньше модуля суммы двух остальных. Докажите, что сумма всех трёх этих чисел равна нулю**.**

Доказательство. Обозначим числа в условии за $a\le b\le c$, по условию, $|a|\ge|b+c|,|b|\ge|a+c|,|c|\ge|a+b|$. Если $a\ge0$, то первое неравенство возможно лишь при $a=b=c=0$ и в этом случае их сумма равна нулю. Если $b=0$, то из второго неравенства следует $a+c=|a+c|=0$ и снова сумма всех чисел равна 0.

Умножая числа на -1, если нужно, дальше можем считать $a<0<b\le c$. Тогда $-a=|a|\ge|b+c|=b+c$, откуда $a+b+c\le0$ и $-a\ge b+c>c$, откуда $a+c<0$ и $|a+c|=-a-c$. Из второго неравенства условия теперь получаем $b=|b|\ge|a+c|=-a-c$ и $a+b+c\ge0$. Следовательно, $a+b+c=0$, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. При нерассмотрении каждого из случаев $a\ge0$ или $b=0$ снимаем по 1 баллу. Если нет правильного сведения к случаю $a<0<b\le c$ и не разобран симметричный случай $a\le b<0<c$: снимем 1 балл.

11.4. Найти все натуральные числа n , которые можно представить в виде $n=\frac{x+\frac{1}{x}}{y+\frac{1}{y}}$, для некоторых натуральных чисел x и y .

Ответ. $n=1$

Решение. Преобразуем равенство в условии к виду $n=\frac{(x^2+1)y}{(y^2+1)x}$. Заметим, что числа x^2+1 и x , а также числа y^2+1 и y взаимно просты, поэтому x в знаменателе может сократиться только с y в числителе, поэтому y делится на x и, в частности, y не меньше x. Аналогично, y^2+1 в знаменателе может сократиться только с x^2+1 в числителе, поэтому y^2+1 делит x^2+1, в частности, не превосходит его, откуда y не превосходит x. Следовательно, y равен x и $n=1$. Число $n=1$ получается при любой паре равных x и y, скажем, когда они равны 1.

Критерии проверки. Фразу в решении типа «числа x^2+1 и x, а также числа x^2+1 и y взаимно просты» можно считать верной без подробных пояснений. Если ссылок на взаимную простоту нет: оценка не более 2 баллов. Если не сказано явно, что число $n=1$ всё же получается при любой паре равных x и y, скажем, когда они равны чему-то конкретному: снимем 1 балл.

11.5. а) Квадрат размера 1 на 1 разбит на 25 не обязательно одинаковых прямоугольников, каждый из которых имеет одинаковый периметр ***p***. Найти минимальное и максимальное возможное значение ***p***. б) Можно ли разбить единичный квадрат на 30 не обязательно одинаковых прямоугольников периметра 2?

Ответ. а) Минимальное значение p равно 0,8 = 4/5, максимальное значение p равно 2,08=2+2/25. б) Да, можно, способ указан в решении.

Решение. а) Один из прямоугольников разбиения должен иметь площадь не меньше, чем 1/25, обозначим его стороны за x и y. По неравенству о среднем арифметическом и средним геометрическом имеем $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}\geq\sqrt{\frac{1}{25}}=\frac{1}{5}$, значит, периметр этого прямоугольника, равный $2(x+y)$. не меньше $\frac{4}{5}=0{,}8$. Это значение достигается для разбиения квадрата на 25 одинаковых квадратиков со стороной 0,2.

С другой стороны, разбиение квадрата на 25 равных прямоугольников со сторонами 1 и 1/25 даёт пример $p=2{,}08$, поэтому p максимальное точно больше 2. В любом разбиении единичного квадрата на 25 прямоугольников найдётся прямоугольник площади не больше 1/25, обозначим его стороны за $x\leq1$ и $y\leq1$., при этом . $x+y=\frac{p}{2}>1$., и $x\geq\frac{p}{2}-y\geq\frac{p}{2}-1$. Следовательно, должен найтись такой x из интервала $\left[\frac{p}{2}-1,1\right]$, для которого $x\left(\frac{p}{2}-x\right)\leq\frac{1}{25}$.Данная функция является квадратичной с отрицательным старшим коэффициентом, поэтому её минимум на отрезке принимается в одном из концов этого отрезка. Соответствующие значения на концах равны $\frac{p}{2}-1$. Следовательно, $\frac{p}{2}-1\leq\frac{1}{25}$ и $p\leq2{,}08$.

б) Опишем способ разбиения единичного квадрата на 30 прямоугольников периметра 2. Расположим четыре из них со сторонами $x<\frac{1}{2}$ и $1-x$ большими сторонами вдоль сторон квадрата так, чтобы в центре остался квадрат со стороной $1-2x$. Разобьём его на 26 равных прямоугольников со сторонами $1-2x$ и $\frac{1-2x}{26}$, их периметры равны $\frac{1-2x}{13}+2-4x$, что должно равняться 2, откуда $x=\frac{1}{54}$. Заметим, что в данном разбиении присутствуют всего два типа прямоугольников, и что данный способ позволяет разбить квадрат на любое, не меньшее 4, число прямоугольников периметра 2.

Критерии проверки. В пункте а) каждая из оценок стоит по 2 балла. Если при этом не приводятся точные примеры (один или оба) достижимости оценок, снимаем 1 балл. Пункт б) оценивается в 3 балла.

Если приведены верные примеры разбиений для правильных минимального и максимального значений "p" (обоих!): 1 балл.

Если при этом сделаны попытки обосновать минимальность и максимальность этих значений

с применением соображений типа: "максимальная площадь прямоугольника с фиксированным периметром достигается для квадрата" и "минимальная площадь прямоугольника с фиксированным периметром достигается для максимально вытянутого прямоугольника, когда одна из его сторон равна 1": ещё 1 балл.
И, если по принципу Дирихле в разбиении были найдены прямоугольники площадей не меньше 1/25 и не больше 1/25, и к ним уже верно применены предыдущие соображения для оценки минимального и максимального значений "p": ещё 2 балла.
Если при этом имеются неточности: снимать 1-2 балла.