Каждая задача каждого класса оценивается из 7 баллов

11 класс

11.1. Пусть $a^2+b^2=c^2+d^2=1$ и $ac+bd=0$ для некоторых действительных чисел a, b, c, d. Найти все возможные значения выражения $ab+cd$.

Ответ. 0.

Решение. Пусть сначала $b\neq 0$. Выразим из второго равенства $d=\frac{-ac}{b}$ и подставим в равенство $c^2+d^2=1$. Избавившись от знаменателя, получим $c^2(a^2+b^2)=b^2$, откуда ввиду $a^2+b^2=1$ получим $b=\pm c$. Подставив это в равенство $a^2+b^2=c^2+d^2$, получим $a=\pm d$. Ввиду равенства $ac+bd=0$ имеем либо $b=c, a=-d$, либо $b=-c, a=d$. В обоих случаях $ab+cd=0$.

Если $b=0$, то из $ac+bd=0$ следует $a=0$ или $c=0$. Первое невозможно в силу $a^2+b^2=1$, значит $c=0$, откуда снова $ab+cd=0$.

Критерии проверки. Только ответ даже с соответствующими a, b, c, d: 0 баллов. Отсутствия рассмотрения случая $b=0$ (если это необходимо в решении): минус 1 балл.

11.2. Решить уравнение: $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=2$.

Ответ. $x_1=\frac{\Pi}{4}+\frac{\Pi n}{2}$, $x_2=\frac{\Pi}{2}+\Pi n$, $x_1=\pm\frac{\Pi}{6}+\Pi n$.

Решение. Воспользуемся формулой $\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}$, преобразуем уравнение к виду $\cos 6x+\cos 4x+\cos 2x=-1$. Сложим в нём первый и третий косинусы: $2\cos 2x\, Cos\, 4x+\cos 4x=-1$ и сделаем замену $\cos 2x=t$. Получим уравнение $2t^3+t^2-t=0$, из которого $t_1=0, t_2=-1, t_3=\frac{-1}{2}$. Отсюда находим три серии решений: $x_1=\frac{\Pi}{4}+\frac{\Pi n}{2}$, $x_2=\frac{\Pi}{2}+\Pi n$, $x_1=\pm\frac{\Pi}{6}+\Pi n$. Отбор корней тут не нужен.

Критерии проверки. Потеря одной серии решений, или их неверное нахождение: минус 3 балла. Потеря двух серий, или их неверное нахождение: минус 5 баллов.

11.3. Может ли сумма объёма, длин всех рёбер и площадей всех граней некоторого прямоугольного параллелепипеда, длины рёбер которого являются целыми числами, равняться 866?

Ответ. Нет.

Решение. Обозначим длины рёбер исходного параллелепипеда за $x,y,z,$ тогда сумма объёма, длин всех рёбер и площадей всех его граней равна $xyz+2(xy+xz+yz)+4(x+y+z)=866$. Если добавить к обеим частям 8, это уравнение можно записать как $(x+2)(y+2)(z+2)=874$. Правая часть является произведение простых чисел 2, 19 и 23, откуда легко следует, что это единственное разложение данного числа в произведение трёх натуральных чисел, больших 1, и одно из них равно 2. Однако левая часть уравнения является произведением трёх натуральных чисел, каждое из которых не меньше трёх, что приводит к противоречию. Следовательно, равенство из условия задачи невозможно.

Критерии проверки. Найдено разложение левой части уравнения $(x+2)(y+2)(z+2)=874$: 4 балла

11.4. В множестве X из 17 элементов выделено семейство из N различных непустых подмножеств таких, что каждый элемент множества X содержится ровно в двух подмножествах из этого семейства. Каково максимальное значение N? Найдите число всех возможных различных типов таких семейств для максимального N. Два семейства подмножеств имеют различные типы, если не получаются друг из друга перестановкой элементов X.

Ответ. Максимальное N равно 25, существуют два различных типа семейств из 25 подмножеств, удовлетворяющих условию задачи.

Решение. Рассмотрим произвольное семейство из N различных непустых подмножеств таких, что каждый элемент множества X содержится ровно в двух подмножествах из этого семейства. Если в нём x одноэлементных подмножеств, то общая сумма S мощностей подмножеств этого семейства не меньше, чем $x+2(N-x)=2N-x$. С другой стороны, каждый элемент множества X содержится ровно в двух подмножествах из этого семейства, поэтому S=34, значит N не превосходит $(34+x)/2$. Наконец, количество одноэлементных подмножеств x не превосходит числа элементов X, равного 17, значит, N не превосходит 25. Отметим, что для $N=25$ количество одноэлементных подмножеств в семействе может равняться 16 или 17.

1) Если $x=17,$ то оставшиеся 8 «больших» подмножеств должны быть двух- и более

элементными. Если среди них y двухэлементных, то общее число элементов в 8 больших множествах равно 17 и не меньше $2y+3(8-y)=24-y$, откуда y не меньше 7. Если оно больше 7, то трёх- и более элементные множества в сумме содержали бы один элемент, что невозможно. Значит, единственная возможность: попарно непересекающиеся 7 двухэлементных и одно трёхэлементное подмножества. Вместе с 17 одноэлементными они дают первый пример искомого в условии семейства подмножеств. Пример семейства такого типа: 17 одноэлементных подмножеств {1},{2},...,{17}, 7 двухэлементных подмножеств {1,2},{3,4},...,{13,14}, и трёхэлементное {15,16,17}.

2) Если $x=16$, то, оставшиеся 9 подмножеств должны быть двух- и более элементов. Если среди них y двухэлементных, то общее число элементов в 9 больших подмножествах равно 18 н не меньше $2y+3(9-y)=27-y$, откуда y не меньше 9. Значит, все большие подмножества двухэлементные. Всего в них 18 элементов, значит два из них пересекаются по одному элементу (который не лежит ни в одном одноэлементном подмножестве), а остальные попарно не пересекаются. Вместе с 16 одноэлементными они дают второй, отличный от первого, пример искомого в условии семейства подмножеств. Пример семейства такого типа: 16 одноэлементных подмножеств {1},{2},...,{16}, 9 двухэлементных подмножеств {1,2}, {3,4},...,{13,14},{15,17},{16,17}.

В ходе рассуждений мы доказали, что других семейств, отличных от найденных, нет.

Критерии проверки. За каждый найденный пример одного из двух типов семейств: по 1 баллу. Доказательство максимальности N=25: 3 балла. Доказательство того. что типов максимальных семейств ровно 2: 2 балла.

11.5. Пусть A и B — две различных фиксированных точки окружности, C — произвольная точка этой окружности, отличная от A и B, и MP — перпендикуляр, опущенный из середины M хорды BC к хорде AC. Доказать, что прямые PM при любом выборе C проходят через некоторую общую точку T.

Доказательство. Сначала считаем, что C выбрана на большей дуге AB окружности и величина угла ACB не больше 90 градусов. Опустим из B на прямую AC перпендикуляр с основанием E. Треугольник BEC прямоугольный, с постоянным углом при вершине C, следовательно, такие треугольники при всех C подобны между собой. Отсюда вытекает, что угол APB между стороной AC и медианой BP во всех таких треугольниках один и тот же и зависит только от длины хорды AB. Несложно подсчитать, что тангенс этого угла вдвое больше тангенса угла ACB. Значит, точка P при этом всегда лежит на окружности S, содержащей вершины всех углов данной величины, опирающихся на отрезок AB. Наконец, MP — перпендикуляр к хорде AP окружности S, следовательно, MP всегда проходит через конец T диаметра окружности S, проходящего через A. По доказанному. S не зависит от выбора C, значит, T тоже не зависит от выбора C.

Если же точка C выбрана на меньшей дуге окружности и угол ACB — тупой, то проделав всё аналогично, мы снова получим прямоугольный треугольник BEC с тем же углом при вершине C, что и в первом случае, Но здесь угол APB будет равен 180 минус угол BPE, являющийся в этом случае углом между BP и AC и равный аналогичному углу из первого случая. Следовательно, в этом случае снова P лежит на окружности S, с другой стороны от хорды AB и перпендикуляр MP к хорде AP снова проходит через конец T диаметра окружности S, проходящего через A.

Критерии проверки. Утверждение задачи доказано для выбора C только на одной из дуг исходной окружности с концами A и B: 5 баллов.