

**Заключительный этап Всесибирской открытой олимпиады школьников  
2016-2017 г.г. по математике 11 класс**

*Время работы 4 астрономических часа  
баллов*

*Каждая задача оценивается в 7*

**11.1.** Могут ли при каком-то значении  $x$  оба числа  $\cos x + \sqrt{2}$  и  $\cos 2x + \sqrt{2}$  быть рациональными?

**11.2.** Решить в действительных числах систему уравнений  $x^2 + xy + y^2 = 4, x^4 + x^2y^2 + y^4 = 8$ .

**11.3.** Внутри остроугольного треугольника  $ABC$  выбрали точку  $P$ , отличную от  $O$  — центра описанной окружности треугольника  $ABC$ , и такую, что угол  $PAC$  равен углу  $PBA$  и угол  $PAB$  равен углу  $PCA$ . Доказать, что угол  $APC$  — прямой.

**11.4.** Доказать, что рёбра произвольного тетраэдра (треугольной пирамиды) можно разбить некоторым образом на три пары так, что существует треугольник, длины сторон которого равны суммам длин рёбер тетраэдра в этих парах.

**11.5.** Найти все натуральные  $n$ , для которых все натуральные числа от 1 до  $n$  включительно можно записать в ряд в таком порядке, что сумма первых слева  $k$  чисел будет либо делить сумму всех  $n - k$  оставшихся, либо делиться на неё при любом  $k$  от 1 до  $n - 1$ .

***Задача не считается решенной, если приводится только ответ!***