Решения заданий второго этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников 2016-2017 г.г. по математике

9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Купец купил в Твери несколько мешков соли и продал их в Москве с прибылью в 100 рублей. На все вырученные деньги он снова купил в Твери соль (по тверской цене) и продал в Москве (по московской цене). На этот раз прибыль составила 120 рублей. Сколько денег он потратил на первую покупку?

Ответ. 500 рублей.

Решение. Дополнительно потраченные во второй раз 100 рублей принесли купцу дополнительные 20 рублей прибыли. Значит, в первый раз, чтобы получить $5\cdot 20 = 100$ рублей прибыли, купец должен был заплатить $5\cdot 100 = 500$ рублей.

Второе решение. Обозначим сумму первой покупки за x, тогда на вложенный в Твери рубль он получит в Москве $\frac{x+100}{x}$ рублей. Следовательно, после второй покупки-продажи он получит $\frac{x+100}{x}(x+100) = x+100+120$ рублей. Решая, получим $x = 500$.

Критерии проверки. Только ответ с проверкой: 2 балла.

9.2. По окружности выписано 10 чисел, сумма которых равна 100. Известно, что сумма каждых трех чисел, стоящих рядом, не меньше 29. Укажите такое наименьшее число A, что в любом наборе чисел, удовлетворяющем условию, каждое из чисел не превосходит A.

Ответ. $A = 13$.

Решение. Пусть X – наибольшее из выписанных чисел. Оставшиеся числа разобьем на 3 тройки "соседей". Сумма чисел в каждой такой тройке не меньше 29, следовательно, $X \le 100 - 3\cdot 29 = 13$. Пример набора с максимальным числом 13: 13, 9, 10, 10, 9, 10, 10, 9, 10, 10.

Критерии проверки. Доказано, что искомое число не меньше 13: 4 балла. Пример для 13: 3 балла.

9.3. В четырёхугольнике *ABCD* точки *P,Q,R,S* – середины сторон *AB,BC,CD,DA* соответственно, а *T* – точка пересечения отрезков *PR* и *QS*. Докажите, что сумма площадей четырёхугольников *APTS* и *CRTQ* равна половине площади четырёхугольника *ABCD*.

Доказательство. Покажем, что площадь четырёхугольника *PQRS* равна половине площади *ABCD*. Заметим, что отрезок *PS* является средней линией треугольника *ABD*, поэтому площадь треугольника *APS* равна четверти площади треугольника *ABD*. Аналогично, площадь треугольника *QCR* равна четверти площади треугольника *BCD*, а сумма площадей *QCR* и *APS* равна четверти площади *ABCD*. Так же доказывается, что и сумма площадей *PBQ* и *RDS* равна четверти площади *ABCD*. Наконец, площадь *PQRS* равна разности площадей *ABCD* и треугольников *QCR, APS, PBQ и RDS*, то есть половине площади *ABCD*.

Окончательно, сумма площадей четырёхугольников *APTS* и *CRTQ* равна сумме площадей треугольников *QCR* и *APS* и треугольников *PST* и *QRT*. Последняя составляет половину площади параллелограмма *PQRS*, поэтому ответом является сумма двух четвертей площади *ABCD*, то есть половине площади *ABCD*.

Критерии проверки. Доказано того, сумма площадей *QCR* и *APS* равна четверти площади *ABCD* : 2 балла. Доказано что площадь четырёхугольника *PQRS* равна половине площади *ABCD:* 3 балла. Идея разбиения суммы площадей четырёхугольников *APTS* и *CRTQ* на сумму площадей треугольников *QCR* и *APS* и треугольников *PST* и *QRT*: 1 балл.

9.4. Найдите наименьшее натуральное число, в записи которого каждая цифра встречается ровно по одному разу и которое делится на 990.

Ответ. 1234758690.

Решение. Число 990 есть произведение взаимно простых чисел 2,5,9 и 11. Любое десятизначное число, составленное из различных цифр, взятых по разу, делится на 9, так как их сумма, равная 45, делится на 9. По признаку делимости на 10 искомое число должно оканчиваться на 0. Осталось разобраться с делимостью на 11.

Признак делимости на 11 звучит так: число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммой всех его цифр, стоящих на нечётных по порядку слева направо местах и суммой его цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11. Оценим значение S суммы цифр искомого числа, стоящих на нечётных местах: оно не меньше 1+2+3+4+5=15 и не больше 5+6+7+8+9=35. Следовательно, разность между суммой всех цифр числа, стоящих на нечётных местах и суммой его цифр, стоящих на чётных местах, равная 2S-45, является нечётным числом из интервала от -15 до 25, делящимся на 11.

Таких чисел всего два: -11 и 11, для них S соответственно, равна 17 и 28. Легко убедиться, что для S=17 есть только два варианта S=1+2+3+4+7 и S=1+2+3+5+6. Соображения минимальности дают для них число 1526384970.

Для S=28 будем выписывать по порядку минимально возможные цифры слева направо, пока это возможно с соблюдением условия, что сумма цифр на местах с нечётными номерами может быть равна в итоге 28, а сумма цифр на местах с чётными номерами – 17. Получится 1234, далее сумма оставшихся 3 цифр на пятом, седьмом и девятом местах должна равняться 24, что возможно только, если они равны 7,8 и 9, откуда и получается число в ответе. Оно меньше, чем ранее найденное 1526384970 для S=17. Если бы можно было найти меньшее число, для него было бы S=28 и пятая слева цифра была бы меньше 7, что, как мы поняли, невозможно.

Критерии проверки. Если ответ угадан и проверена делимость: 1 балл. Найдены возможные значения S: 2 балла. Ответ выписан, а потом полным перебором доказана минимальность: 7 баллов.

9.5. Пусть *M* – конечное множество чисел (различных). Известно, что среди любых трех его элементов найдутся два, сумма которых принадлежит *M*. Какое наибольшее число элементов может быть в *M*?

Ответ. 7.

Решение. Пример множества из 7 элементов: {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}.

Докажем, что множество $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ из $n > 7$ чисел требуемым свойством не обладает. Можно считать, что $a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n$ и $a_4 > 0$ (смена знаков всех элементов наше свойство не меняет). Тогда $a_1 + a_2 > a_1 + a_3 > a_1 + a_4 > a_1$, т. е. ни одна из сумм $a_1 + a_2$, $a_1 + a_3$ и $a_1 + a_4$ множеству *M* не принадлежит. Кроме того, суммы $a_2 + a_3$ и $a_2 + a_4$ не могут одновременно принадлежать *M*, поскольку $a_2 + a_3 > a_2 + a_4 > a_2$. Получается, что по крайней мере для одной из троек (a_1, a_2, a_3) и (a_1, a_2, a_4) сумма любых двух ее элементов множеству *M* не принадлежит.

Критерии проверки. Доказано, что в М не больше 7 элементов: 5 баллов. Пример для 7 элементов: 2 балла.