9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Какое количество 5%-ого и 20%-ого растворов соли в воде нужно взять, чтобы получить 90 кг 7%-ого раствора?

Ответ. 78 кг 5%-ого и 12 кг 20%-ого растворов.

Решение. Обозначим массу 5%-ого раствора за x кг, масса 20%-ого раствора будет $90-x$ кг, а общая масса соли в 5%-ом и 20%-ом растворах равна массе соли в 90 кг 7%-ого раствора: $\frac{5}{100}x+\frac{20}{100}(90-x)=\frac{7}{100}90$, откуда $1800-15x=630$ и $x=78$.

Критерии проверки. Ответ найден угадыванием с проверкой: 1 балл. Выписаны уравнения, но не решены: 2 балла.

9.2. В детском саду каждому ребёнку выдали по три карточки, на каждой из которых написано либо «МА», либо «НЯ». Оказалось, что слово «МАМА» из своих карточек могут сложить 20 детей, слово «НЯНЯ» - 30 детей, а слово «МАНЯ» - 40 детей. У скольких детей все три карточки были одинаковы?

Ответ. У 10-ти детей.

Решение. Обозначим число детей, получивших три карточки «МА» за , две карточки «МА» и одну карточку «НЯ» - за , две карточки «НЯ» и одну карточку «МА» - за , три карточки «НЯ» - за , Тогда, слово «МАМА» могут сложить все дети из первой и второй групп и только они, слово «НЯНЯ» - все дети из третьей и четвёртой групп и только они, слово «МАНЯ» - все дети из второй и третьей групп и только они. Следовательно, $x+y=20, z+t=30, y+z=40$, значит искомое число равно $x+t=(x+y)+(z+t)-(y+z)=20+30-40=10$ детей.

Критерии проверки. Угаданный ответ с какими-то примерами предлагается никак не оценивать. Составленная, но не решённая система уравнений: 3 балла. Неправильно истолковано условие: 0 баллов.

9.3. По кругу записаны 14 положительных чисел (не обязательно целых). Сумма любых четырёх чисел, стоящих подряд, равна 30. Докажите, что каждое из этих чисел меньше 15.

Доказательство. Первый способ. Из условия следует, что все числа, между которыми стоят 3 числа, равны. Следовательно, равны между собой числа с номерами: 1,5,9,13,3,7,11 и равны между собой числа с номерами 2,6,10,14,4,8,12, то есть все числа с нечётными номерами равны x, а все числа с чётными номерами равны y. Сумма любых четырёх чисел, идущих подряд, равна $2x+2y=30$, откуда $x+y=15$. Значит, $x=15-y<15, y=15-x<15$, что и требовалось доказать.

Второй способ. Разобьём числа на 7 пар соседних. Из условия следует, что сумма чисел с первого по четвёртое равна сумме чисел с третьего по шестое, поэтому сумма чисел в первой паре равна сумме чисел в третьей паре. Далее, аналогично, эти суммы равны суммам в пятой, седьмой, второй, четвёртой и шестой парах. Следовательно, суммы чисел в каждой паре равны 15 и, ввиду их положительности, каждое число меньше 15..

Критерии проверки. Доказано, что любые два числа, стоящие через три, равны: 1 балл. Доказано, что любые два числа через одно равны: 3 балла (в решении можно обойтись и без этого!). Доказано, что сумма любых двух чисел, стоящих рядом равна 15: 5 баллов.

9.4. На плоскости дан отрезок AB длины 1 и на нём произвольная точка M. На отрезках AM и MB как на сторонах построены квадраты AMCD и MBEF, лежащие по одну сторону от AB. Пусть P и Q - точки пересечения диагоналей этих квадратов соответственно. Найдите геометрическое место середин отрезков PQ, когда точка M пробегает весь отрезок AB.

Ответ. Средняя линия ST равнобедренного прямоугольного треугольника AKB, построенного на AB, как на гипотенузе по ту же строну от AB, что и квадраты. Это отрезок длины ½ на высоте ¼ от AB, параллельный AB, проекция которого на AB совпадает с интервалом $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$.

Решение. Опустим из точек P и Q перпендикуляры PX и QY на AB, четырёхугольник PXYQ является трапецией, поэтому расстояние от середины PQ до AB равно длине её средней линии, то есть полусумме длин PX и QY. Длины PX и QY равны половинам длин рёбер квадратов AMCD и MBEF и их сумма равна половине длины AB, то есть ½. Значит, расстояние от середины PQ до AB равно ¼. Далее, если обозначит длину AX через $x \le \frac{1}{2}$, то длина AY равна $1-\left(\frac{1}{2}-x\right)=x+\frac{1}{2}$ и расстояние от A до проекции середины PQ равно полусумме этих длин, то есть $x+\frac{1}{4}$, что находится в пределах от ¼ до ¾. Таким образом, мы доказали, что середина PQ всегда лежит на указанном в ответе отрезке ST. Заметим, что точки P и Q при этом перемещаются по катетам AK и BK треугольника AKB из ответа.

В обратную сторону, рассмотрим произвольную точку R на отрезке ST. Нужно показать, что она является серединой отрезка PQ при некотором выборе точки M. Если R совпадает с S или T, нужно взять M совпадающей с A или B соответственно. Если R — внутренняя точка отрезка ST, проведём отрезок KZ с серединой в R и Z на AB, через Z проведём прямые, параллельные катетам AK и BK. Их точки пересечения с отрезками BK и AK соответственно будут точками P и Q, так как R будет точкой пересечения диагоналей параллелограмма PKQZ. Точка M при этом симметрична точке A относительно проекции P_1 точки P на AB, или симметрична точке B относительно проекции Q_1 точки Q на AB. Эти проекции совпадают, так как сумма длин A P_1 и BQ_1 равна сумме длин PP_1 и QQ_1, которая равна удвоенному расстоянию от R до AB, то есть ½.

Критерии проверки. Доказано, что геометрическое место середин отрезков PQ лежит на отрезке ST: 3 балла. Доказано, что любая точка отрезка ST является серединой отрезка PQ при подходящем выборе точки M: 4 балла.

Замечание. Если точки S и T не включены в ответ, оценка не снижается.

9.5. Про семь натуральных чисел $a,b,c,a+b-c,a+c-b,b+c-a,a+b+c$ известно, что все они — различные простые числа. Найти все значения, которые может принимать наименьшее из этих семи чисел.

Ответ. 3.

Решение. Из условия следует, что, в частности, a,b,c - тоже простые. Если бы минимальное из семи чисел равнялось двойке, четыре последних числа были различными чётными, то есть не могли быть все простым. Если все семь чисел больше трёх, в силу простоты они не делятся на 3, их остатки от деления на 3 равны 1 или -1. Рассмотрим варианты остатков от деления на 3 самих чисел a,b,c. Если все их остатки равны между собой, то делиться на 3 будет число $a+b+c$. Если два из них равны, а третье имеет противоположный знак, то на 3 будет делиться одно из чисел $a+b-c,a+c-b,b+c-a$. В обоих случаях одно из семи чисел делится на 3 и по предположению больше 3, что противоречит его простоте. Следовательно, минимальное из семи чисел в условии может быть равно только 3. Пример таких чисел: $a=7,b=13,c=17,a+b-c=3,a+c-b=11,b+c-a=23,a+b+c=37$

Критерии проверки. Верный ответ с примером: 2 балла. Доказательство минимальности числа 3: 5 баллов. Если не рассмотрен случай с двойкой — снимаем 2 балла.