Решения заданий заключительного этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников 2016-2017 г.г. по математике

9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. На сторонах AB и AD квадрата ABCD внутрь него построены равносторонние треугольники ABK и ADM соответственно. Докажите, что треугольник CKM тоже равносторонний.

Доказательство. По построению, отрезки BK и DM равны ребру квадрата и углы CBK и CDM равны 30°, поэтому равнобедренные треугольники CBK и CDM равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, их основания CK и CM тоже равны и треугольник CKM – равнобедренный. Треугольники CBK и CDM равнобедренные с углами 30°при вершинах B и D, поэтому величины углов BCK и DCM при их основаниях равны 75°, значит, углы BCM и DCK равны 15°, поэтому угол KCM равен 60°. Следовательно, треугольник CKM является равнобедренным с углом 60° при вершине, то есть, равносторонним.

Второй способ. Можно просто посчитать в координатах, длина стороны треугольника CKM при этом равна $(2-\sqrt{3})AB$.

Критерии проверки. Доказано равенство CK и CM: 3 балла. Доказано, что величина угла KCM равна 60°: 4 балла.

9.2. За круглым столом расселись 15 мальчиков и 20 девочек. Оказалось, что количество пар сидящих рядом мальчиков в полтора раза меньше, чем количество пар сидящих рядом девочек. Найти количество пар мальчик – девочка, сидящих рядом.

Ответ. 10.

Решение. Назовём *группой* несколько детей одного пола, сидящих подряд, слева и справа от крайних из них уже сидят дети противоположного пола. Пусть X –число групп мальчиков, оно равно и числу групп девочек, сидящих подряд. Легко убедиться, что число пар соседних детей в каждой группе на один меньше, чем число детей в этой группе, поэтому число пар сидящих рядом мальчиков равно $15\text{-}X$, а число пар сидящих рядом девочек равно $20\text{-}X$. По условию, 3(15-X)=2(20-X), откуда X=5. Следовательно, пар соседних мальчиков 10, девочек - 15, а смешаных соседних пар 15+20-(10+15)=10.

Критерии проверки. Замечено, что число пар соседних детей в каждой группе на один меньше, чем число детей в этой группе: 1 балл. Замечено, что число пар сидящих рядом мальчиков равно $15\text{-}X$, а число пар сидящих рядом девочек равно $20\text{-}X$: 2 балла. Замечено, что число групп мальчиков равно числу групп девочек: 1 балл.

9.3. Можно ли представить число 2017 в виде суммы двух натуральных чисел, сумма цифр одного из которых вдвое больше суммы цифр другого?.

Ответ. Нельзя.

Доказательство. Предположим противное, что 2017 можно представить как сумму натуральных чисел A и B, причём сумма цифр A вдвое больше суммы цифр B. При сложении двух цифр одного разряда в нём остаётся их сумма, если она меньше 10, либо их сумма минус 10, если она больше 10, а единица уходит в следующий разряд. Таким образом, сумма цифр A+B равна сумме цифр A плюс сумма цифр B минус число переходов единицы в следующий разряд при сложении, умноженное на 9. По условию, сумма цифр A вдвое больше суммы цифр B, поэтому их общая сумма делится на 3, значит и сумма цифр A+B=2017 должна делиться на 3 – противоречие с тем, что сумма цифр числа 2017 равна 10.

Критерии проверки. Замечено, что сумма цифр A+B равна сумме цифр A плюс сумма цифр

В минус число переходов единицы в следующий разряд при сложении, умноженного на 9: 3 балла.

9.4. Какое максимальное число треугольников с вершинами в вершинах правильного 18-ти угольника можно отметить так, чтобы никакие две различных стороны этих треугольников не были параллельны? Треугольники при этом могут пересекаться и иметь общие вершины, совпадающие отрезки считаются параллельными.
Ответ. 5.
Решение. Оценка числа треугольников. Занумеруем вершины 18-ти угольника от 1 до 18 по часовой стрелке. Сторонами треугольников являются стороны и диагонали правильного 18-ти угольника. Назовём диагональ *чётной*, если между её концами содержится чётное число сторон, и *нечётной* – в противном случае. Чётность диагонали совпадает с чётностью разности номеров её концов. Ввиду чётности общего числа сторон многоугольника всё равно, с какой стороны от диагонали считать число сторон. Стороны тоже считаем нечётными диагоналями. Две диагонали AB и CD, где AC и BD не пересекаются, параллельны тогда и только тогда, когда между A и C, B и D содержится равное число сторон, то есть положительная разность номеров A и C равна положительной разности номеров B и D. Несложно заметить, что любая нечётная диагональ параллельна одной из девяти сторон 18-ти угольника, а любая чётная – одной из девяти диагоналей, отсекающих от 18-ти угольника треугольник (две стороны которого являются сторонами многоугольника). Всего имеется 18 семейств диагоналей, любые две диагонали одного семейства параллельны, а любые две диагонали разных семейств – не параллельны. Девять из этих семейств содержат чётные диагонали и девять – нечётные. В качестве представителей нечётных семейств можно взять стороны с концами 12 23,…,89,9 10 и диагонали 13, 24,…, 8 10, 9 11. Значит, треугольники с попарно непараллельными сторонами, построенные на вершинах правильного 18-угольника, не могут использовать больше, чем по одной из каждого семейства этих диагоналей, и общее число этих треугольников не превосходит 18:3=6. Более того, произвольный треугольник, построенный на трёх вершинах 18-ти угольника, может содержать либо три чётных диагонали, либо одну чётную и две нечётных, так как сумма чётностей трёх его сторон равна чётности числа 18. Следовательно, общее число нечётных сторон в любом множестве треугольников с попарно непараллельными сторонами должно быть чётным, и мы не сможем использовать для их сторон все 18 семейств диагоналей. Таким образом, число треугольников с попарно непараллельными сторонами, построенных на вершинах правильного 18-угольника, не превосходит пяти.
Пример. Пять треугольников с вершинами {1,2,3}, {3,4,5}, {5,6,7}, {7,8,9}, {1,5,9}.

Критерии проверки. Показано, что есть 18 попарно непараллельных семейств диагоналей: 2 балла: Показано, что все 9 непараллельных нечётных диагоналей не могут быть использованы как стороны треугольников: 2 балла. Пример: 2 балла. Обоснование примера: 1 балл.

9.5. Укажите любой способ расстановки всех натуральных чисел от 1 до 100 включительно в ряд в некотором порядке так, чтобы сумма любых n из них, стоящих подряд, не делилась на n при всех $2 \le n \le 100$.
Решение. Запишем все числа от 1 до 100 слева направо по порядку: 1,2,3,4,...,99,100, разобъём на 50 пар соседних: 1 и 2, 3 и 4, …, 99 и 100, и в каждой паре числа поменяем местами: 2,1,4,3,...,100,99. Докажем, что полученная перестановка удовлетворяет условию задачи.
а) Заметим, что в полученной перестановке каждое число на нечётном месте на 1 больше номера своего места, а на чётном — на 1 меньше. В частности, отсюда следует, что сумма любых двух соседних чисел в перестановке равна сумме номеров их мест. То же относится и к сумме любого чётного числа идущих подряд чисел из перестановки.

б) Заметим также, что сумма чётного числа последовательных натуральных чисел не делится на их количество, а сумма нечётного числа последовательных натуральных чисел делится на их количество. Действительно, найдём сумму n последовательных чисел, первое из которых равно $a+1$, получим $a+1+a+2+...+a+n=na+\frac{n(n+1)}{2}$ - тут первое слагаемое всегда делится на n, а второе, только когда $n+1$ чётно.

в) Если из переставленных чисел выбрать чётное число идущих подряд, то в силу замечания а) их сумма равна сумме номеров их мест и не делится на их количество в силу б). Если же из переставленных чисел выбрать нечётное число идущих подряд, то в силу замечания а) несложно заметить, что их сумма на 1 больше или меньше суммы номеров их мест, которая делится на их количество в силу б). Значит, сумма самих чисел не может делится на их количество.

Критерии проверки. Предъявлен пример с проверкой для какого-то достаточно большого количества, не меньше 10, (но не 100) первых натуральных чисел: 1 балл. Примеры без проверок для 100 чисел, кроме легко проверяемых: 0 баллов.