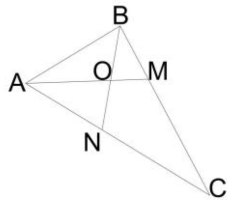
8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Лёшка записал число, а потом заменил в нём одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные – разными. У него получилось слово НОВОСИБИРСК. Могло ли исходное число делиться на 9?
Ответ: Да, могло.
Решение: Например, 10203454638.
Критерии: Любой правильный пример без проверки – 7 балл.



8.2. В треугольнике ABC на сторонах BC и AC взяты точки M и N соответственно. Отрезки AM и BN пересекаются в точке O. Докажите, что сумма углов AMB и ANB больше угла AOB.
Решение: Рассмотрим четырёхугольник $NOMC$. Сумма его углов равна

$$360^\circ = \angle MON + \angle ONC + \angle NCM + \angle CMO = \angle AOB + 180^\circ - \angle ANB + \angle NCM + 180^\circ - \angle AMB,$$

откуда следует $\angle ANB + \angle AMB = \angle AOB + \angle NCM$.
Так как $\angle NCM > 0$, отсюда следует искомое.

8.3. Найдите наибольшее шестизначное число, у которого каждая цифра, начиная с третьей, равна сумме двух предыдущих цифр.
Ответ: 303369.
Решение: Пусть первые цифры у этого числа a и b. Тогда третья его цифра равна $(a + b)$, четвёртая – $(a + 2b)$, пятая – $(2a + 3b)$, шестая – $(3a + 5b)$. Значит, $3a + 5b < 10$.
Если $b > 1$, то неравенство не выполнено. Если $b = 1$, то $3a < 5$, а значит $a = 1$, а само число равно 112358. Если, $b = 0$, то неравенство можно переписать $3a < 10$, откуда максимальное значение $a = 3$. Если $a < 3$, то получившееся число будет меньше, так как цифра в старшем разряде будет меньше. Тогда исходное число равно 303369. Отметим, что 303369 > 112358.
Критерии: Только ответ – 1 балл. Верно найдено представление всех цифр – 1 балл. Баллы складываются.

8.4. Пароход “Раритет” после выхода из города три часа двигается с постоянной скоростью, затем час глохнет, двигаясь по течению, потом три часа двигается с той же скоростью и так далее. Если пароход начинает своё движение в городе А и идёт в город Б, то тратит на это 10 часов. Если начинает в городе Б и идёт в город А – 15. За какое время из города А в город Б можно добраться на плоту?

Ответ: 60 часов.

Решение: Обозначим скорость парохода за U, а скорость реки за V. Когда пароход идёт из Б в А, он приходит в пункт назначения как раз перед четвёртой остановкой двигателей, то есть 12 часов он плывёт со скоростью U-V в сторону А, и три часа идёт назад со скоростью V в сторону Б. Значит, расстояние между городами равно $S = 12(U\text{-}V) - 3V = 12U - 15V$ (1).

Когда пароход идёт из А в Б, он успевает дважды заглохнуть, а затем проплыть ещё два часа на своём ходу. Тогда он 8 часов плывёт со скоростью U+V в сторону Б и 2 часа плывёт по течению со скоростью V в сторону Б. Тогда расстояние равно $S = 8(U+V)+2V = 8U + 10V$ (2).

Приравнивая, получаем $12U - 15V = 8U + 10V$ или $4U = 25V$ или $(U/V) = (25/4)$. Время, которое мы потратим на путешествие на плоту, равно $S/V = 12(U/V) - 15(V/V) = 12*(25/4) - 15 = 60$ часов.

Критерии: Только ответ – 0 баллов. Верно составлено уравнение (1) или (2) – 1 балл (эти баллы суммируются).

8.5. Кондитер при приготовлении булочек использует различные пряности. Однажды он испёк 10 булочек, причем оказалось, что в любой из них имеется больше половины всего ассортимента пряностей. Докажите, что можно выбрать три пряности таким образом, что в каждой булочке будет хотя бы одна из этих пряностей.

Решение: Построим двудольный граф, где вершинами первой доли будут 10 булочек, а вершинами второй доли – все n пряностей. Ребро между булочкой k и пряностью m будет означать, что для приготовления булочки номер k использовалась пряность номер m.

Посчитаем сумму степеней вершин первой доли, по условию она строго больше $10*(n/2) = 5n$. Очевидно, она равна сумме степеней вершин второй доли. Так как во второй доле ровно n вершин, найдётся одна, степень которой хотя бы 6 (если у всех степень не больше пяти, то в сумме будет не более $5n$). Выберем эту пряность и все булочки, для приготовления которых она использовалась, и удалим их из графа. После этого возможно два варианта.

Вариант первый. Осталось 4 вершины в первой доле. Степень каждой из них всё ещё больше $n/2$, так как мы удалили вершину, которая не была с ними связана. Значит, сумма степеней первой доли строго больше $2n$. С другой стороны, в правой доле n-1 вершина, и если степень каждой меньше 3, то сумма степеней не превосходит $2n$-2. Значит, найдётся пряность, у которой степень хотя бы 3. Уберём её и все булочки, содержащие её. Выбирая затем любую пряность, которая соединена с оставшейся булочкой, если она осталась, мы находим искомую тройку (очевидно, такая пряность найдётся, так как с какой-то пряностью каждая булка точно соединена).

Вариант второй. Осталось не более трёх булочек. Тогда степень каждой вершины больше $n/2$, а во второй доле n-1 вершина. Докажем, что найдётся пряность, которая используется для двух булок. Предположим, что это не так. Тогда первая булка содержит хотя бы $[n/2 + 1]$ пряность, а второй остаётся $n - 1 – [n/2 + 1] < n/2$ пряностей, чего не хватает. Значит, можем выбрать в качестве второй пряности ту, которая используется для двух булочек, а в качестве третьей – любую пряность, которая используется для оставшийся третьей булочки (если она осталась).

Критерии: Только идея двудольного графа – 0 баллов. Доказано, что есть вершина степени больше 5 – 3 балла. Забыт “вариант второй” – 5 баллов.