Решения и критерии проверки задач Второго этапа Всесибирской олимпиады школьников 2016-2017 г.г. по математике
7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. По кругу в каком-то порядке расставлены числа от 1 до 9. Может ли оказаться, что сумма любых двух идущих подряд чисел делится хотя бы на одно из чисел 2 и 9?
Ответ: Может.
Решение: Да, расставим числа следующим образом: -7-1-9-3-5-4-6-8-2-.
Критерии: Любая правильная расстановка – 7 баллов.

7.2. На доске был нарисован квадрат со стороной 100 см. Алексей пересёк его двумя прямыми, параллельными одной паре сторон квадрата. После этого Данил пересёк квадрат двумя прямыми, параллельными другой паре сторон квадрата. В итоге квадрат разбился на 9 прямоугольников, и оказалось, что длины сторон центрального участка равны 40 см и 60 см. Найдите сумму площадей угловых прямоугольников.
Ответ: 2400.
Решение 1: Без ограничения общности будем считать, что у центрального прямоугольника 60 см – ширина и 40 см – высота. Обозначим за x и y соответственно ширину и высоту нижнего левого прямоугольника. Тогда у верхнего левого стороны x и $(60 – y)$, у верхнего правого – $(40 – x)$ и $(60 – y)$, у нижнего правого – $(40 – x)$ и y. Общая площадь угловых прямоугольников равна

$$xy + 60x – xy + 40y - xy + 2400 - 60x - 40y + xy = 2400.$$

Решение 2: Пусть Алексей не только провёл линии, но и выкинул всю среднюю часть, ограниченную этими линиями, а потом Данил сделал то же самое. Тогда от первоначального квадрата остался прямоугольник 60 и 40, с одной стороны. С другой стороны, всё, что осталось и есть прямоугольники, о которых спрашивают в условии задачи. Значит, площадь угловых прямоугольников равна площади оставшегося прямоугольника и равна 2400.
Критерии: Только ответ – 0 баллов. Ответ с проверкой – 1 балл.
В решении явно предполагается, что разрезы проводились по линиям сетки:
решение опирается на это (например, перебор) — не больше 3 баллов;
решение не использует — баллы не снимать.

7.3. В подъезде Лера ездит на лифте, а Лада спускается пешком (скорости лифта и Лады постоянны). Однажды, когда они спускались с 4-го этажа на 1-ый, Лада оказалась быстрей, и некоторое время ждала Леру внизу. В другой раз девочки спускались с 8 этажа, и Лада увеличила свою скорость вдвое, из-за чего прождала внизу в три раза больше, чем в первый раз. Во сколько раз первоначальная скорость Лады больше скорости лифта?
Ответ: В 11/4 раз.
Решение: Пусть U, V — скорости Лады и лифта соответственно, S — расстояние между двумя этажами. Тогда в первый раз девочки преодолели расстояние $3S$, а значит, Лада прождала внизу $(3S/V)$ - $(3S/U)$. Аналогично, во второй раз — $(7S/V)$ - $(7S/2U)$. Так как второе число в три раза больше первого можем составить уравнение:

$$3(3S/V - 3S/U) = (7S/V - 7S/2U),$$
$$9S/V - 9S/U = 7S/V - 7S/2U,$$
$$18/V - 18/U = 14/V - 7/U,$$
$$18U - 18V = 14U - 7V,$$
$$4U = 11V,$$
$$U = 11/4V.$$

То есть скорость Лады в 11/4 раз больше.
Критерии: Ответ, ответ с проверкой – 0 баллов. Верно составлено уравнение, больше ничего не сделано – 3 балла.

7.4. На квадратной доске со стороной 2017 в левом нижнем углу стоит шахматный слон. Алексей и Данил по очереди ходят этим слоном, первый ходит Алексей, причём игрокам запрещается ходить в клетки, в которых слон уже был (слон ходит по диагонали на любое расстояние). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может гарантировать себе выигрыш вне зависимости от действий соперника?
Ответ: Данил.
Решение: Опишем стратегию игры Данила и докажем, что побеждает именно он.
1) Если Алексей своим ходом оказывается на главной диагонали, ходим в любую клетку на этой же диагонали. Это всегда можно сделать, так как изначально непосещённых клеток на ней чётное число, а после хода Алексея всегда нечётное.
2) Если Алексей ходит в клетку вне главной диагонали, то мы идём в клетку, зеркально симметричную ей относительно главной диагонали. Очевидно, что до этого посетить эту клетку мы не могли.
Так как у Данила всегда есть, куда сходить, а клеток конечное число, Алексей обязательно проиграет.
Критерии: только ответ — 0 баллов.
Только стратегия без объяснения, почему она работает — не более 3 баллов.
Если в подобном решении не отмечено, почему Данил побеждает из-за конечности игры — снимать 1 балл.

7.5. Егор, Никита и Иннокентий по очереди играли в шахматы друг с другом (двое играют, один смотрит). Причём, после каждой партии проигравший уступал место за доской зрителю (ничьих не было). В итоге оказалось, что Егор участвовал в 13 партиях, а Никита – в 27. Сколько партий сыграл Иннокентий?
Ответ: 14.
Решение: С одной стороны, партий было не менее 27. С другой стороны, игрок не может пропустить две партии подряд, то есть каждый играет не реже, чем каждую вторую партию. Поэтому, если партий было хотя бы 28, Егор бы поучаствовал хотя бы в 14, что противоречит условию. Значит, партий было сыграно ровно 27, и в каждой участвовал Никита. В 13 из них его соперником был Егор, значит, в 14 оставшихся это был Иннокентий, и это и есть ответ.
Критерии: Только ответ, ответ с проверкой – 0 баллов.