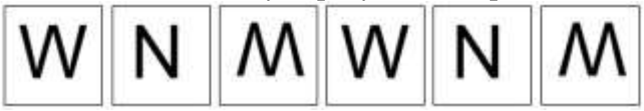
Решения и критерии проверки задач Заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников 2016-2017 г.г. по математике
7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

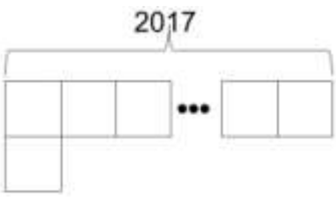
7.1. Пароход “Раритет” стремительно идёт ко дну. Если капитан Алексей раздаст ровно 2017^{2017} указаний своим 26 матросам, то пароход получится спасти. Каждому следующему матросу Алексей может дать на 2 указания меньше или на 2 указания больше, чем предыдущему. Сможет ли Алексей спасти пароход?
Ответ: Нет.
Решение: Очевидно, что чётность количества полученных указаний у всех матросов одинакова. Но тогда общее число полученных указаний - это сумма 26 чисел одной чётности, т.е. чётное число. Но 2017^{2017} — нечётное, поэтому это невозможно.
Критерии:
Только ответ, ответ с проверкой – 0 баллов.
Утверждения «чётность количества полученных указаний у всех матросов одинакова» и «сумма 26 чисел одной чётности – чётное число» -- очевидные, за отсутствие обоснований этих фактов баллы не снимать.

7.2. У Данила есть 6 карточек с буквами, из которых он смог сложить слово WNMWNM, изображённое на картинке. Заметим, что данное слово обладает замечательным свойством: если его перевернуть на 180 градусов, получится оно же. Сколько всего слов, обладающих таким свойством, может составить Данил, используя сразу все 6 карточек?



Ответ: 12 слов.
Решение:
(1) По условию у Данила есть 2 карточки с буквой N, которая при переворачивании переходит в себя, и 4 карточки с буквой M, которая при переворачивании переходит в букву W. Очевидно, чтобы получить слово с искомыми свойствами, нужно как-то расположить 2 буквы M и одну N в первой половине, тогда вторая половина слова восстановится однозначно.
(2) Поставить букву N можно тремя способами, после чего на первое из оставшихся мест букву M можно поставить двумя способами (перевернуть или нет), и на последнее тоже двумя. Всего вариантов 3*2*2 = 12.
Критерии:
Только ответ - 1 балл.
Только идея, что первые три буквы задают слово однозначно (часть (1) решения) - 2 балла (складывается с предыдущим).
После замечания (1) перебор всех вариантов с хотя бы одним пропущенным случаем – не более трёх баллов.
Выписаны все 12 вариантов, но не написано, почему других вариантов нет – 1 балл.

7.3. Клетки бесконечной клетчатой плоскости покрасили в чёрный и белый цвета таким образом, что в любом уголке из 2018 клеток (даже повёрнутом и/или перевёрнутом) белых и чёрных клеток поровну. Верно ли, что все клетки плоскости покрашены в шахматном порядке?



Ответ: да.

Решение:

(1) заметим, что если уголок лежит так, как показано на рисунке, то его можно развернуть выпирающей клеткой вверх. При этом все остальные клетки останутся на своих местах. Значит, в любом столбце клетки через одну имеют одинаковые цвета. Аналогичное рассуждение верно и для строк.

(2) Допустим, раскраска не шахматная, тогда найдутся две соседние клетки одного цвета. Допустим, это две клетки белого цвета в строке.

(3) Из (2) и (1) получаем, что вся строка белая. Действительно, в (1) мы показали, что клетки через одну повторяются, соответственно, если мы знаем цвета двух соседних клеток, то знаем цвета клеток всей строки.

(4) Расположим уголок длинной частью в белой строке, тогда количество белых в нём хотя бы 2017, а черных не более 1. Противоречие с условием. Значит, нет клеток одного цвета стоящих рядом, то есть раскраска шахматная.

Критерии:

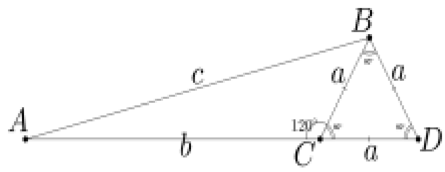
Утверждение (1) – 2 балла, замечание (2) – 1 балл, замечание (3) – 2 балла. Эти баллы суммируются.

Только ответ – 0 баллов.

7.4. В треугольнике со сторонами длиной a,b и c напротив стороны c лежит угол в 120 градусов. Докажите, что из отрезков длины a, c и $a+b$ можно составить треугольник.

Решение:

Пусть дан треугольник ABC, в котором $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Продлим отрезок AC за точку C до точки D на расстояние a. Получим треугольник CBD. В нём $BC = CD$, то есть он равнобедренный, и угол BCD = 60 градусам как смежный углу BCA. Но тогда треугольник BCD равносторонний, и $BD = a$. Рассмотрим треугольник ABD. В нём $AB = c$, $BD = a$, $AD = a+b$, то есть он является искомым.



Критерии:

Чертёж, аналогичный данному, без обоснования – 5 баллов.

7.5. Есть 12 монет, из которых одна, фальшивая, легче остальных. Также имеются чашечные весы без гирь. Про них известно, что они либо обычные (то есть на них всегда перевешивает тяжёлая кучка), либо волшебные (на таких всегда перевешивает лёгкая кучка, равенство показывается правильно), но неизвестно, волшебные они всё-таки, или обычные. Можно ли за три взвешивания на таких весах найти фальшивую монету?

Ответ: Можно.

Решение:

Взвесим монеты 1, 2, 3, 4 и 5, 6, 7, 8.

1. если равенство, то все эти монеты нормальные, а фальшивая 9, 10, 11 или 12.

Взвесим 1, 2, 3 и 9, 10, 11.

1.2. Если равенство, то фальшивая монета 12.

1.3. Если неравенство, то мы узнаём, какие у нас весы – волшебные или нет. Тогда у нас осталось одно взвешивание, три подозрительные монеты. Взвесим 9 и 10 монеты, если равенство, то фальшивая 11, если неравенство, то фальшивая монета определяется однозначно, ведь мы знаем, какие у нас весы.

2. Если неравенство в первом взвешивание. Допустим, не умоляя общности, перевесила чаша 1, 2, 3, 4. Тогда вторым взвешиванием взвесим 2, 3, 6 и 10, 4, 5.

2.1. Если второе взвешивание привело к равенству. Значит, фальшивая 1 и весы волшебные или весы обычные, а фальшивая 7 или 8. Взвесив 7 и 8, узнаем это.

2.2. Пусть перевесила чаша 2, 3, 6. Тогда или весы волшебные, а фальшивая 2 или 3, или весы обычные, а фальшивая 5. Взвесив 2 и 3, узнаем это.
2.3. Пусть перевесила чаша 10, 4, 5. Тогда фальшивая 4 и весы волшебные, либо весы обычные, а фальшивая 6. Взвесив 6 и 12, узнаем это.

Критерии:

В алгоритме пропущены простые случаи – не более 3 баллов.

В алгоритме пропущены сложные случаи – 0 баллов.