10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Шестнадцать рыбаков, разбитых на три группы, вместе поймали 113 рыб. Каждый рыбак первой группы поймал по 13 рыб, второй — по 5 рыб, третьей — по 4 рыбы. Сколько рыбаков в каждой группе?

Ответ. В первой группе 5 рыбаков, во второй группе 4 рыбака, в третьей группе 7 рыбаков.

Решение. Обозначим количество рыбаков в группах через x, y, z соответственно. По следует подобие четырёхугольников с коэффициентом 1/3, но это для решения задачи не нужно.

Критерии проверки. Доказательство параллельности сторон четырёхугольника, образованного точками пересечения медиан и *ABCD*: 5 баллов. Применение этого для вписанности четырёхугольника, образованного точками пересечения медиан: 2 балла.

10.4. Найти все множества из четырёх действительных чисел таких, что каждое число в сумме с произведением трёх остальных равно 2.

Ответ. $\{1,1,1,1\}$, $\{-1,-1,-1,3\}$, $\{-1,-1,3,-1\}$, $\{-1,3,-1,-1\}$ и $\{3,-1,-1,-1\}$.

Решение. Обозначим числа искомой четвёрки за a,b,c,d. По условию, $a+bcd=b+acd=2$, из первого равенства имеем $(a-b)(1-cd)=0$, причём, если $a \neq b, cd=1$ и из второго равенства $a+b=2$. Следовательно, для любой пары чисел из нашей либо эти числа равны, либо их сумма равна 2 и произведение оставшейся пары чисел равно 1. В частности, среди чисел нашей четвёрки содержится максимум два различных числа.

1) Все четыре числа равны между собой, тогда $a^3+a=2$. Ввиду монотонности функции $f(x)=x^3+x$, являющейся суммой двух монотонно возрастающих функций $f(x)=x^3$ и $f(x)=x$, решение будет единственно: $a=1$. Получаем первую искомую четвёрку $\{1,1,1,1\}$.

2) Часть чисел (не менее двух) равна a, остальные (не менее одного) равны $2-a$. Если чисел, равных a, ровно два, то $a(2-a)=1$, откуда $a=1$ и мы имеем на самом деле случай 1). Если чисел, равных a ровно три, то $a^2=1$ и, либо $a=1$ и мы опять получаем случай 1), либо $a=-1$ и мы получаем новую искомую четвёрку $\{-1,-1,-1,3\}$. Добавляя решения, получающиеся перестановками переменных, получим три новых четвёрки.

Критерии проверки. Разобран с доказательством только случай, когда все числа равны: 2 балла. Потеря случая равных чисел: минус 2 балла. Потеря симметричных решений: минус 1 балл.

10.5. В каждой клетке таблицы 5 на 5 записано по одной букве так, что в любой строке и в любом столбце не больше трёх различных букв. Какое наибольшее число различных букв может быть в такой таблице?

Ответ. 11.

Решение. Если в каждой строке не больше двух различных букв, то общее их число не превосходит 10=5*2. Далее можно считать, что в первой строке ровно три различных буквы. Если каждая из оставшихся строк имеет хотя бы одну общую букву с первой, то общее число букв не превосходит 3+4*2=11. Пусть имеется строка, можно считать, вторая, в которой три различных буквы, отличных от букв первой строки. Тогда в каждом столбце кроме букв первой и второй строк может быть не более одной новой буквы, всего не более 3+3+5*1=11.
Пример расстановки 11 различных букв: по главной диагонали таблицы из левого нижнего угла в правый верхний записаны первые пять различных букв, по соседней снизу диагонали — следующие четыре, в левом верхнем углу — десятая, а в остальных клетках — одиннадцатая буквы.

Критерии проверки. Доказана максимальность 11: 5 баллов. Пример для 11: 2 балла. Любой неверный ответ и попытка его доказательства: 0 баллов.