10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Найти все решения уравнения: $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$.

Ответ. $\frac{1}{2}\le x\le 1$.

Решение. Сначала, как и положено, найдём область допустимых значений переменной x.

Из неотрицательности подкоренных выражений имеем: $2x-1\ge 0, x\ge\frac{1}{2}$ и $x-\sqrt{2x-1}\ge 0, x\ge 0, x\ge\frac{1}{2}$, второе эквивалентно $(x-1)^2\ge 0$. Итого, $x\ge\frac{1}{2}$.

Ввиду неотрицательности левой и правой частей уравнения можно возвести всё в квадрат, получив $2x+2\sqrt{(x-1)^2}=2$, то есть $x+|x-1|=1$. При $x\ge 1$ получим единственный ответ $x=1$, а при $\frac{1}{2}\le x<1$ получим верное тождество 1=1, поэтому весь этот промежуток является решением.

Критерии проверки. Верно найдена ОДЗ: 1 балл. При возведении в квадрат не упомянута неотрицательность сторон равенства: снимаем 1 балл. Приобретение лишних решений: итоговая оценка не выше 3 баллов. Потеря одного значения из множества решений – снимаем 2 балла, потеря более одного – снимаем 3 балла.

10.2. В прямоугольной трапеции ABCD сумма длин оснований AD и BC равна её высоте AB. В каком отношении делит боковую сторону CD биссектриса угла ABC?

Ответ. 1:1.

Решение. Обозначим пересечение биссектрисы угла ABC с прямой AD за Q. Угол ABC прямой, поэтому треугольник ABQ – прямоугольный равнобедренный и длина отрезка AQ равна длине высоты AB, то есть сумме длин AD и BC. Следовательно, точка Q расположена на продолжении основания AD за точку D и длина отрезка DQ равна длине основания BC. Значит, четырёхугольник BCQD является параллелограммом и биссектриса BQ угла ABC, являющаяся в нём диагональю, делит боковую сторону CD, являющаяся в нём другой диагональю, пополам.

Критерии проверки. Доказано, что Q расположена на продолжении основания AD за точку D и длина отрезка DQ равна длине основания BC: 3 балла. Если не доказано, что Q расположена на продолжении основания AD за точку D: снимаем 2 балла.

10.3. Сначала шарики были разложены по нескольким белым и чёрным коробкам так, что в каждой белой было по 31 шарику, а в каждой чёрной - по 26 шариков. Затем принесли ещё три коробки и разложили шарики так, что в каждой белой коробке стало по 21 шарику, а в каждой чёрной - по 16 шариков. Можно ли принести ещё несколько коробок и разложить шарики так, чтобы в каждой белой коробке стало по 15 шариков, а в каждой чёрной - по 10 шариков?

Ответ. Нельзя.

Решение. Если бы требуемое в условии было возможно, то общее число шариков делилось бы на 5. Тогда, поскольку остатки всех чисел 31,26,21 и 16 от деления на 5 равны 1, то общее количество коробок и в первом и во втором случаях делилось бы на 5. Этого не может быть, потому что количества коробок в первом и втором случаях отличаются на 3.

Критерии проверки. Замечено, что, если бы требуемое в условии было возможно, то общее число шариков делилось бы на 5: 1 балл. Замечено, что остатки всех чисел 31,26,21 и 16 от деления на 5 равны 1: 1 балл. Замечено, что количество коробок в первом и втором случаях делится на 5: 3 балла. Замечено, что этого не может быть, потому что количества коробок в первом и втором случаях отличаются на 3: 2 балла.

10.4. На плоскости расположено конечное множество кругов так, что любые два из них можно накрыть кругом диаметра 10. Докажите, что все эти круги можно накрыть квадратом со стороной 10.

Доказательство. Спроектируем круги на ось абсцисс, получим конечное множество отрезков, выберем в нём самую левую точку A и самую правую точку B, докажем, что расстояние между ними не превосходит 10. Действительно, рассмотрим произвольную пару кругов, проекция одного из которых содержит A, а другого — B, радиусы их обозначим, соответственно, за a и b, центры — за O_A и O_B. Нарыв их кругом диаметра 10 мы видим, что хорда этого круга, проходящая через точки O_A и O_B имеет длину не больше 10, значит, длина отрезка O_AO_B не больше $10-a-b$. Тогда и горизонтальная проекция отрезка O_AO_B имеет длину не больше $10-a-b$, поэтому длина отрезка AB не больше $O_AO_B+a+b \le 10$. Аналогично, расстояние между самой верхней и самой нижней точками вертикальных проекций множества кругов не больше 10. Следовательно, вся система кругов помещается в прямоугольнике с горизонтальными и вертикальными сторонами длины не больше 10, который, очевидно, накрывается квадратом со стороной 10.

Критерии проверки. Доказательство того, что длина отрезка O_AO_B не больше $10-a-b$: 2 балла. Доказательство того, что расстояние между самой левой и самой правой точками горизонтальных проекций кругов не превосходит 10: 3 балла.

10.5. Можно ли число 2016 представить в виде суммы нескольких попарно различных натуральных чисел таких, что среди всех возможных попарных сумм этих чисел ровно 7 различных?

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что 2016 можно представить в виде суммы попарно различных натуральных чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ таких, что среди всех возможных попарных сумм этих чисел ровно 7 различных. Общее количество пар из n чисел равно $\frac{n(n-1)}{2}$ и должно быть не меньше 7, поэтому $n \ge 5$. С другой стороны, ввиду очевидных неравенств: $a_1+a_2 < a_1+a_3 < \ldots < a_1+a_n < a_2+a_n < \ldots < a_{n-1}+a_n$, имеем $n-1+n-2 = 2\mathrm{n}-3 \le 7$ и $n \le 5$. Следовательно, $n=5$ и каждая невыписанная попарная сумма чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ равна одной из семи сумм, рассмотренных в длинном неравенстве. Всего нерассмотренных сумм три: $a_2+a_3 < a_2+a_4 < a_3+a_4$ и все они больше a_1+a_3 и меньше a_3+a_5. По условию, они должны совпадать с суммами $a_1+a_4 < a_1+a_5 < a_2+a_5$ в указанном порядке. Отсюда: $a_2-a_1 = a_4-a_3 = a_5-a_4 = a_3-a_2$, следовательно, числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_5$ образуют арифметическую прогрессию. Тогда их сумма равна $5\frac{a_1+a_5}{2} = 2016$, откуда следует, что число 4032 должно делиться на 5 - противоречие.

Критерии проверки. Оценка $n \ge 5$: 1 балл. Оценка $n \le 5$: 2 балла. Доказательство, что пять чисел образуют арифметическую прогрессию: 2 балла. Доказательство, что сумма этой арифметической прогрессии не может равняться 2016: 2 балла.