10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Решить в действительных числах систему уравнений: $x^3+y = 2x, y^3 + x = 2y$.

Ответ. $(0,0),\pm(1,1),\pm(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ - всего 5 решений.

Решение. Рассмотрим случаи.

1) $x = y$, тогда $x^3 = x = y$, откуда $(x,y)=(0,0),\pm(1,1)$- первые три решения.

2) $x=-y$, тогда $x^3 = 3x = -y$, откуда $(x,y)=(0,0),\pm(\sqrt{3},-\sqrt{3})$- первое и два последних решения.(Шутка – дальше можно не решать)

3) $x\neq\pm y$ и $x,y\neq 0$. Вычтем из первого второе уравнение и разделим на $x-y$, получим $x^2+xy+y^2=3$. Сложим первое и второе уравнение и разделим на $x+y$, получим $x^2-xy+y^2=1$. Следовательно, $x^2+y^2=2, x+y=1$, откуда $x^2+y^2-2xy=0$, то есть $x=y$, что в данном случае невозможно. Новых решений не получается

Критерии проверки. Угаданы с проверкой все решения: 1 балл. Рассмотрены первые два случая: по 1 баллу за каждый. Потеряна часть решений: снимаем от1 до 4 баллов

10.2. Трое играют в настольный теннис, причем игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге оказалось, что первый игрок сыграл 21 партию, а второй – 10. Сколько партий сыграл третий игрок?.

Ответ. 11.

Решение. По условию, первый игрок сыграл 21 партию, поэтому всего было сыграно не менее 21 партии. Из каждых двух партий подряд второй игрок хотя бы в одной должен участвовать, значит, партий было не более $2\cdot 10 + 1 = 21$. Следовательно, была сыграна всего 21 партия, и первый игрок участвовал в каждой из них. В 10 партиях он встречался со вторым, а в оставшихся 11 партиях – с третьим. Пример такого турнира: первый игрок встречается со вторым в партиях с чётными номерами, а с третьим – в партиях с нечётными номерами.

Критерии проверки. Если ответ угадан и приведён пример турнира: 1 балл. Присутствует замечание, что из каждых двух партий подряд второй игрок хотя бы в одной должен участвовать: 2 балла. Не приведён пример турнира: минус 1 балл.

10.3. В четырёхугольнике ABCD равные диагонали AC и BD пересекаются в точке O, а точки P и Q –середины сторон AB и CD соответственно. Докажите, что биссектриса угла AOD перпендикулярна отрезку PQ.

Доказательство. Отложим от точки B отрезок BE, равный и параллельный диагонали AC.

Тогда четырёхугольник AEBC является параллелограммом, сторона AB – одной его диагональю, а отрезок EC – другой, следовательно, точка P является также серединой отрезка EC. Поэтому PQ является средней линией треугольника ECD и параллелен его стороне ED. Ввиду параллельности сторон углов AOD и EBD, их биссектрисы также параллельны. Треугольник EBD является равнобедренным, следовательно, биссектриса угла EBD при его вершине, перпендикулярна основанию ED. Значит, биссектриса угла AOD перпендикулярна отрезку PQ.

Критерии проверки. Сделано дополнительное построение, ведущее к решению: 1 балл.

10.4. Назовём *змейкой* в выпуклом n-угольнике незамкнутую, не самопересекающуюся ломаную из $n-1$звеньев, множество вершин которой совпадает с множеством всех вершин n-угольника. Найти число различных змеек в n-угольнике. (Змейки равны, если совпадают, как геометрические места точек. Например, число змеек в треугольнике равно 3)

Ответ. $n \cdot 2^{n-3}$.

Решение. 1) Докажем по индукции, что число змеек, одним из концов которых является фиксированная вершина A, равно 2^{n-2}. База при $n=3$очевидна. Для произвольного n, имеем две возможности для звена с концом A – это стороны AB и AC n-угольника, где B и C – соседние с A вершины. Если первое звено AX отлично от AB и AC, то диагональ AX делит n-угольник на два невырожденных многоугольника с более, чем тремя вершинами в каждом, считая A и X. Тогда второе звено змейки и все следующие, ввиду её несамопересекаемости, будут лежать в одном из них и не смогут содержать вершину другого, отличную от A и X, что противоречит условию. Пусть первым звеном является AB, тогда оставшиеся $n-2$ звена змейки являются змейкой с началом B в $n-1$- угольнике, получающемся из исходного удалением треугольника ABC. По индукционному предположению, таких змеек будет 2^{n-3} - это в точности все змейки с крайним звеном AB. Аналогично, змеек с крайним звеном AC тоже будет 2^{n-3}, поэтому общее число змеек, одним из концов которых является A, будет 2^{n-2}

2) Теперь умножим 2^{n-2} на число вершин n и поделим пополам, так, как каждую змейку мы подсчитали дважды – с каждого из её концов – всего $n \cdot 2^{n-3}$ змейки.

Критерии проверки. Отсутствие деления пополам: минус 2 балла. Отсутствие обоснования того, что при выборе следующего звена змейки есть только две возможности из «соседних» вершин: минус 2 балла.

10.5. На доске написаны 10 натуральных чисел, среди которых могут быть равные, причём квадрат каждого из них делит сумму всех остальных. Какое наибольшее количество различных чисел может быть среди выписанных?

Ответ. Четыре.

Решение. Пример для четырёх различных чисел: 1,1,1,2,2,3,5,5,5,5.

Пусть среди выписанных чисел ровно $n \geq 2$ различных, максимальное из которых мы обозначим за x, а сумму всех чисел — за S. Тогда сумма всех чисел, кроме максимального, не превосходит $(9-n)x + x - 1 + x - 2 + \ldots + x - (n-1) = 9\text{x} - \dfrac{n(n-1)}{2}$, что не меньше x^2, так как делится на него. Следовательно, неравенство $x^2 - 9\text{x} + \dfrac{n(n-1)}{2} \leq 0$ - имеет решения в натуральных числах, и $\dfrac{9-\sqrt{81-2\text{n}(n-1)}}{2} \leq x \leq \dfrac{9+\sqrt{81-2\text{n}(n-1)}}{2}$. Положительность дискриминанта даёт нам $n \leq 6$, и $x \leq 8$, $S - x \leq 72 - 1 = 71$. Рассмотрим случаи каждого максимального числа отдельно.

а) $x = 8$, тогда $S - x \leq 71$ и делится на 64, поэтому S=72. Тогда $72 - k$ делится на $k^2, k \leq 7$

только при $k = 1$, поэтому в данном случае $n \le 2$.
б) $x = 7$, тогда $S - x \le 62$ и делится на 49, поэтому S=56. Тогда $56 - k$ делится на $k^2, k \le 6$ только при $k = 1$, поэтому и в данном случае $n \le 2$.
в) $x = 6$, тогда $S - x \le 53$ и делится на 36, поэтому S=42. Тогда $42 - k$ делится на $k^2, k \le 5$ только при $k = 1,2$, поэтому в данном случае $n \le 3$.
г) $x = 5$, тогда $S - x \le 44$ и делится на 25, поэтому S=30. Тогда $30 - k$ делится на $k^2, k \le 4$ при $k = 1,2,3$, поэтому в данном случае $n \le 4$. Искомое множество должно содержать 10 натуральных чисел с суммой 30, среди которых должны быть 1,2,3,5. Теперь уже несложно построить пример для $n = 4$: 1,1,1,2,2,3,5,5,5,5. Этот пример не единственный.

Критерии проверки. Доказано, что $n \le 4$: 5 баллов. Пример для $n = 4$: 2 балла. Оценка $n \le 6$: 2 балла.