Всесибирская открытая олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Заключительный этап
11 класс

28 февраля 2016 Время написания работы 4 астрономических часа Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Найти величину выражения $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{2}{1+xy}$, если известно, что $x \neq y$ и сумма первых двух слагаемых выражения равна третьему.

11.2. По координатной плоскости, стартуя в начале координат, прыгает кузнечик. Первый прыжок длины один см направлен вдоль оси OX, каждый следующий прыжок на 1 см длиннее предыдущего, и направлен перпендикулярно предыдущему в одну из двух сторон по его выбору. Сможет ли кузнечик после сотого прыжка оказаться в начале координат?

11.3. Найти все натуральные числа, которые можно представить одновременно как сумму нескольких (больше одного) натуральных чисел и как произведение тех же натуральных чисел.

11.4. В треугольнике ABC отрезки AK, BL и CM — высоты, H — их точка пересечения, S – точка пересечения MK и BL, P — середина отрезка AH, T — точка пересечения прямой LP и стороны AB. Доказать, что прямая ST перпендикулярна стороне BC.

11.5. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - произвольные действительные числа. Доказать, что найдётся натуральное $k, 1 \le k \le n$ такое, что все k средних арифметических $\frac{a_1+\ldots+a_k}{k}, \frac{a_2+\ldots+a_k}{k-1}, \ldots, \frac{a_{k-1}+a_k}{2}, \frac{a_k}{1}$ не превосходят $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$.

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Заключительный этап
11 класс

28 февраля 2016 Время написания работы 4 астрономических часа Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Найти величину выражения $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{2}{1+xy}$, если известно, что $x \neq y$ и сумма первых двух слагаемых выражения равна третьему.

11.2. По координатной плоскости, стартуя в начале координат, прыгает кузнечик. Первый прыжок длины один см направлен вдоль оси OX, каждый следующий прыжок на 1 см длиннее предыдущего, и направлен перпендикулярно предыдущему в одну из двух сторон по его выбору. Сможет ли кузнечик после сотого прыжка оказаться в начале координат?

11.3. Найти все натуральные числа, которые можно представить одновременно как сумму нескольких (больше одного) натуральных чисел и как произведение тех же натуральных чисел.

11.4. В треугольнике ABC отрезки AK, BL и CM — высоты, H — их точка пересечения, S – точка пересечения MK и BL, P — середина отрезка AH, T — точка пересечения прямой LP и стороны AB. Доказать, что прямая ST перпендикулярна стороне BC.

11.5. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - произвольные действительные числа. Доказать, что найдётся натуральное $k, 1 \le k \le n$ такое, что все k средних арифметических $\frac{a_1+\ldots+a_k}{k}, \frac{a_2+\ldots+a_k}{k-1}, \ldots, \frac{a_{k-1}+a_k}{2}, \frac{a_k}{1}$ не превосходят $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$.