Всесибирская олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Второй этап
10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Найти все ненулевые числа, в пять раз меньшие суммы всех своих цифр.
Ответ. 1,8 (одна целая восемь десятых).
Решение. Раз речь идёт о сумме всех цифр, то искомые числа записываются конечными десятичными дробями. Обозначим произвольное искомое число за x, а сумму его цифр за $S(x)$ тогда $S(x)=5x$ и $x=\frac{2S(x)}{10}$, значит x содержит не более одной цифры после запятой. Если $x=\overline{a..b,c}$ содержит не меньше двух цифр до запятой, то $x=\overline{a..b,c}\geq 10a+\ldots+c>a+\ldots+c=S(x)$ и равенство $S(x)=5x$ невозможно. Остался случай $x=\overline{a,b}=a+\frac{b}{10}$, тогда $10x=10a+b=2S(x)=2a+2b$, откуда $b=8a$, значит $a=1, b=8$.
Критерии. Замечено, что искомые числа записываются конечными десятичными дробями: 1 балл. Доказано, что x содержит не более одной цифры после запятой: 2 балла. Доказано, что x содержит не более одной цифры до запятой: 2 балла. Отыскание x в случае $x=\overline{a,b}=a+\frac{b}{10}$: 2 балла.
Только угадан верный ответ с проверкой: 1 балл.
11.2. Назовём четвертью шахматной доски каждый из 4 квадратов 4 на 4 клетки, на которые её разбивают линии сетки, соединяющие середины её горизонтальных сторон и середины её вертикальных сторон. Найти количество различных расстановок 8 ладей на шахматной доске 8 на 8 таких, что ни одна ладья не бьёт другую и в каждой четверти находится одинаковое число ладей. Шахматная ладья бьёт все клетки горизонтали и вертикали, на пересечении которых стоит.
Ответ. 12^4=20736.
Решение. По условию в каждой четверти стоят по 2 ладьи. Количество способов поставить в левой нижней четверти две не бьющих друг друга ладьи равно удвоенному числу способов выбора двух горизонталей и двух вертикалей, в которых они стоят из четырёх, то есть $2\cdot C_4^2\cdot C_4^2=72$. Если ладьи в левой нижней четверти уже поставлены, для ладей в правой нижней четверти остаются две свободные горизонтали, и количество способов поставить в правой нижней четверти две не бьющих друг друга ладьи равно удвоенному числу способов выбора двух вертикалей, в которых они стоят из четырёх, то есть $2\cdot C_4^2=12$. Аналогично, количество способов поставить в левой верхней четверти две не бьющих друг друга ладьи равно удвоенному числу способов выбора двух горизонталей, в которых они стоят из четырёх, то есть $2\cdot C_4^2=12$. Ладьи в правой верхней четверти могут стоять только в двух оставшихся свободными вертикалях и горизонталях, то есть двумя способами. По правилу умножения общее число способов расстановки равно произведению $72\cdot 12\cdot 12\cdot 2=12^4$.
Критерии. Найдено количество способов поставить в левой нижней четверти две не бьющих друг друга ладьи: 2 балла. Найдено количество способов поставить в правой нижней и левой верхней четверти две не бьющих друг

друга ладьи: 2 балла. Ладьи в правой верхней четверти могут стоять только в двух оставшихся свободными вертикалях и горизонталях, то есть двумя способами: 1 балл. . По правилу умножения общее число способов расстановки равно произведению 7 [illegible]: 1 балл.

11.3. Можно ли расставить в вершинах и на рёбрах правильной треугольной пирамиды десять последовательных натуральных чисел так, чтобы для каждого ребра сумма трёх чисел на ребре и в его концах была постоянной?

Ответ. Нельзя.

Решение. Допустим, требуемая в условии расстановка возможна. Обозначим сумму трёх чисел на каждом ребре и в его концах за S, сложив эти суммы по всем рёбрам, получим 6S – чётное число. С другой стороны, каждое число на ребре мы учли в сумме 6S по разу, а каждое число в вершине — по три раза. Следовательно, 6S равно сумме всех десяти чисел плюс удвоенной сумме всех чисел в вершинах. Однако сумма всех десяти последовательных чисел нечётна, поскольку включает пять чётных и пять нечётных чисел, и не может в сумме с удвоенной суммой чисел в вершинах давать чётное число 6S - противоречие.

Критерии. Замечено, что суммы по всем рёбрам равны чётному числу: 2 балла. Доказано, что 6S равно сумме всех десяти чисел плюс удвоенной сумме всех чисел в вершинах: 3 балла. Показано, что сумма всех десяти последовательных чисел нечётна: 2 балла.

11.4. Внутри окружности взята произвольная точка *M*, отличная от центра окружности. Для каждой хорды окружности, проходящей через *M* и отличной от диаметра, обозначим через C точку пересечения касательных к окружности, проведённых через концы этой хорды. Доказать, что геометрическое место точек C является прямой.

Доказательство. Рассмотрим произвольную хорду AB окружности, проходящую через точку M, обозначим точку пересечения касательных к окружности, проходящих через A и B за C, а центр окружности — за O. Докажем, что проекция E точки C на луч OM постоянна, это значит, что геометрическое место всех точек C лежит на прямой *m*, проходящей через E перпендикулярно OM. Действительно,

$OE = OC \cdot \sin OCE = \dfrac{OA}{\sin OCA}\sin OCE = OA\dfrac{\sin OCE}{\sin OCA}$. Из перпендикулярности CE и OM, OC и AB следует равенство углов OCE и OMA, а из перпендикулярности AC и OA, OC и AB, следует равенство углов OCA и OAM. Из теоремы синусов для треугольника OAM получаем

$OE = OA\dfrac{\sin OCE}{\sin OCA} = OA\dfrac{\sin OMA}{\sin OAM} = OA\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OA^2}{OM} = \dfrac{R^2}{OM}$ - постоянной величине.

С другой стороны, рассмотрим на прямой *m* произвольную точку C. Проведём через M хорду AB так, чтобы угол OMA равнялся углу OCE и A располагалась с той же стороны от прямой OE, что и C. По доказанному касательные к окружности в точках A и B пересекутся в точке C_1 на прямой *m* такой, что угол OC_1E равен углу OMA, то есть совпадает с углом OCE. Отсюда следует, что точки C и C_1 тоже совпадают и геометрическим местом точек C является вся прямая *m*.

Критерии. Равенство углов OCE и OMA, и равенство углов OCA и OAM: по 1 баллу. Из теоремы синусов для треугольника OAM получаем что проекция E точки C на луч OM постоянна: 3 балла. Доказано, что геометрическим местом точек C является вся прямая *m*: 2 балла.

11.5. На дипломатическом приёме присутствуют 99 персон, каждый из которых слышал не менее, чем об n других участниках приёма. При этом если А слышал о Б, это не означает автоматически, что и Б слышал про А. При каком минимальном n гарантированно найдутся два участника приёма, слышавших друг о друге?

Ответ. При $n = 50$.

Решение. Назовём ситуацию когда один из гостей слышал о другом *полузнакомством*. Если каждый гость слышал не менее, чем о 50 других участниках приёма, то всего имеется не менее $99 \cdot 50$ полузнакомств, что больше общего число пар гостей на приёме, равного $\frac{99\cdot 98}{2} = 99\cdot 49$.

Следовательно, в какой - то паре есть не меньше двух полузнакомств, и гости из этой пары слышали друг о друге.

Приведём пример, когда каждый слышал ровно о 49 других гостях, но нет двух гостей, слышавших друг о друге. Расположив гостей по кругу, считаем, что каждый слышал только о следующих за ним по часовой стрелке 49 гостях. В таком случае о каждом слышали только 49 гостей, расположенных перед ним по часовой стрелке. Эти два множества не пересекаются, поэтому для каждого гостя нет другого гостя, о котором бы слышал он и который бы слышал о нём самом.

Критерии. Доказательство, что n не больше 50: 4 балла. Пример того, что n не меньше 50: 3 балла.