11.1. Из пункта А в пункт Б вышел Парамон. В 12^{00}, когда он прошёл половину пути до Б, вслед за ним из А в Б выбежал Агафон, и одновременно из Б в А вышел Соломон. В 13^{20} Агафон встретился с Соломоном, а в 14^{00} догнал Парамона. Во сколько произошла встреча Парамона и Соломона?

Ответ. В 13 часов.

Решение. Обозначим расстояние между А и Б за S км, скорости Парамона, Соломона и Агафона соответственно за x, y, z км в час. Тогда из условия получаем: $\frac{S/2}{z-x} = 2, \frac{S}{y+z} = \frac{4}{3}$, откуда $x + y = \frac{1}{2}S$. Следовательно, Парамон и Соломон встретятся через $\frac{S/2}{S/2} = 1$ час после полудня, то есть в 13 часов.

Указания. Ответ с проверкой: 1 балл. Составление уравнений: 3 балла.

11.2. Медиана АМ треугольника АВС делит отрезок PR, параллельный стороне АС, с концами на сторонах АВ и ВС, на отрезки длины 5 см и 3 см, считая от стороны АВ. Чему равна длина стороны АС?

Ответ. 13 см.

Решение. Обозначим концы отрезка за P и R, точку его пересечения с медианой АМ — за Q, при этом P лежит на стороне АВ, а R — на стороне ВС. Проведём среднюю линию MN треугольника, её длина равна половине длины АС. Воспользуемся подобием пар треугольников ANM и APQ, MAC и MRQ. Коэффициент первого подобия равен k=AM/AQ, а второго AM/MQ, их сумма равна единице. Тогда $k \cdot NM = k \cdot \frac{AC}{2} = 5, (1-k) \cdot AC = 3$, откуда $AC = 13$.

Указания. Проведена средняя линия и замечены оба подобия: 2 балла.

11.3. Можно ли из дробей $\frac{1}{100}, \frac{2}{99}, \frac{3}{98}, \ldots, \frac{100}{1}$ (все дроби с натуральными числителем и знаменателем, сумма числителя и знаменателя которых равна 101) выбрать три, произведение которых равно 1?

Ответ. Нет, нельзя.

Решение. Предположим противное, и найдутся три таких дроби $\frac{a}{101-a}, \frac{b}{101-b}, \frac{c}{101-c}, 1 \le a < b < c \le 100$, произведение которых равно 1. Тогда $2abc = 101^3 - 101^2(a+b+c) + 101(ab+bc+ac)$, правая часть равенства делится на 101, следовательно и левая тоже. Ввиду простоты числа 101 отсюда следует, что одно из чисел $a,b.c$ должно делиться на 101, что невозможно, так как они меньше 101.

Указания. Отсутствие прямого указания на простоту числа 101 приводит к снижению оценки на 3 балла.

11.4. Две окружности пересекаются в точках А и В, и центр О первой из них лежит на второй. На второй окружности выбрана некоторая точка S, отрезок SO пересекает первую окружность в точке P. Доказать, что P является центром вписанной окружности треугольника ABS.

Доказательство. Нужно доказать, что P является точкой пересечения биссектрис треугольника ABS. Отрезки OA и OB равны, как радиусы первой окружности, поэтому равны дуги OA и OB второй окружности, следовательно равны опирающиеся на них вписанные углы ASO и BSO. Значит, SO и с ней SP является биссектрисой угла ASB. Обозначим точу пересечения отрезка SB с первой окружностью за Q. Первая окружность и прямые SA и SB симметричны относительно прямой SO, поэтому точки A и Q также симметричны относительно прямой SO, следовательно, отрезки AP и QP равны, поэтому равны дуги AP и QP первой окружности, следовательно равны опирающиеся на них вписанные углы ABP и QBP. Значит, BP является биссектрисой угла ABQ = ABS. Таким образом, P является точкой пересечения биссектрис углов ASB и ABS и центром вписанной окружности треугольника ABS.

Указания. Доказательство того, что SP является биссектрисой угла ASB: 2 балла. Доказательство того, что отрезки AP и QP равны: 3 балла. Доказательство того, что равны углы ABP и QBP: 2 балла.

11.5. Множество X различных натуральных чисел, не превосходящих n таково, что сумма любых двух, в том числе и совпадающих, элементов *X,* не превосходящая n, тоже принадлежит *X.* Доказать, что среднее арифметическое всех чисел множества X не меньше $\frac{n+1}{2}$.

Доказательство. Обозначим элементы множества X через $1 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_m \le n$. Сначала рассмотрим сумму $x_1 + x_m$, она больше x_m и не может лежать в *X*, следовательно, по условию $x_1 + x_m \ge n+1$. Аналогично, для произвольного $k \le \left[\frac{m+1}{2}\right]$ имеем: $x_{m-k+1} < x_{m-k+1} + x_1 < \ldots < x_{m-k+1} + x_k$. Если $x_{m-k+1} + x_k \le n$, то все суммы $x_{m-k+1} + x_1, \ldots, x_{m-k+1} + x_k$ будут k различными членами *X,* большими x_{m-k+1}, что невозможно, поскольку больше x_{m-k+1} только $x_{m-k+2}, \ldots, x_m$ - всего $k-1$ элементов *X,* противоречие. Следовательно, для каждого $k = 1,2,\ldots\left[\frac{m+1}{2}\right]$ имеем $x_{m-k+1} + x_k \ge n+1$, При нечётном m в частности, $x_{\frac{m+1}{2}} \ge \frac{n+1}{2}$. Суммируя полученные равенства, получим $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \ge m\frac{(n+1)}{2}$, откуда следует утверждение задачи.

Указания. Замечено с обоснованием, что $x_1 + x_m \ge n+1$: 1 балл. Замечено без обоснования, что $x_{m-k+1} + x_k \ge n+1$: ещё 1 балл.