Всесибирская открытая олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике

Заключительный этап

11 класс

28 февраля 2016г Время написания работы 4 астрономических часа Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Найти величину выражения $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{2}{1+xy}$, если известно, что $x\neq y$ и сумма первых двух слагаемых выражения равна третьему.

Ответ. 2.

Решение. Запишем условие равенства суммы первых двух слагаемых третьему в виде: $\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+xy}=\frac{1}{1+xy}-\frac{1}{1+y^2}$ и приведём к общему знаменателю:

Версия от 18.02.2016

$\frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} = \frac{y(y-x)}{(1+y^2)(1+xy)}$. Ввиду $x \neq y$ сокращаем $x-y$ и $1+xy$: $x(1+y^2)=y(1+x^2)$. Последнее равносильно $(x-y)(xy-1)=0$, снова сокращаем $x-y$, получаем $xy=1$ а искомое выражение равно $\frac{2}{1+xy}\cdot 2 = 2$.

Критерии оценивания. Угаданы какие-нибудь подходящие $x \neq y$ и ответ: 1 балл.

11.2. По координатной плоскости, стартуя в начале координат, прыгает кузнечик. Первый прыжок длины один см направлен вдоль оси OX, каждый следующий прыжок на 1 см длиннее предыдущего, и направлен перпендикулярно предыдущему в одну из двух сторон по его выбору. Сможет ли кузнечик после сотого прыжка оказаться в начале координат?

Ответ. Не сможет.

Решение. Кузнечик сделает по 50 вертикальных и горизонтальных прыжков. Длины вертикальных прыжков равны 2,4,..,100 см. Среди этих чисел 25 делящихся на 4 и 25, дающих при делении на 4 остаток 2, следовательно, при любой расстановке плюсов и минусов между ними сумма будет давать делении на 4 остаток 2 и никогда не будет равна 0. Кузнечик после 100 прыжков не сможет оказаться на оси OX, а, значит, и в начале координат.

Критерии. Присутствует идея раздельного рассмотрения прыжков по горизонтали и вертикали: 1 балл. Отсутствие доказательства того, что при любой расстановке плюсов и минусов между ними сумма длин вертикальных прыжков никогда не будет равна 0: минус 3 балла.

11.3. Найти все натуральные числа, которые можно представить одновременно как сумму нескольких (больше одного) натуральных чисел и как произведение тех же натуральных чисел.

Ответ. Все, кроме единицы и простых чисел.

Решение. Докажем, что простые числа и единица нам не подходят. Очевидно, что единица не может быть представлена в виде суммы более, чем одного натурального числа. Если простое число p равно произведению нескольких натуральных, то один из сомножителей равен самому p, а остальные – единице. Сумма этих сомножителей будет, очевидно, больше p.

Пусть n - не простое, тогда существует разложение $n = a \cdot b$, для некоторых $a,b \geq 2$. Тогда $(a-1)(b-1) \geq 1$, поэтому $n = ab \geq a+b$. Следовательно, добавив, при необходимости к числам a,b единицы в количестве, равном $n-a-b$, получим множество натуральных чисел, сумма и произведение которых равны n.

Критерии оценивания. Доказано, что простые числа и единица нам не подходят: 1 балл. Доказано, что любое непростое число, отличное от 1 годится: 6 баллов. Частные случаи: 0 баллов.

11.4. В треугольнике ABC отрезки AK, BL и CM — высоты, H — их точка пересечения, S – точка пересечения MK и BL, P — середина отрезка AH, T — точка пересечения прямой LP и стороны AB. Доказать, что прямая ST перпендикулярна стороне BC.

Доказательство. Обозначим величину угла ACB за $\angle C$, и посчитаем другие углы в треугольнике.

1. Углы AMC и AKC — прямые, опирающиеся на AC, поэтому четырёхугольник AMKC вписан в окружность с диаметром AC.

2. Во вписанном четырёхугольнике AMKC : ∠AMK = 180° -∠C.
3. В прямоугольных треугольниках AKC, ALH: ∠AHL = 90° - ∠CAK = 90° - (90° - ∠C) = ∠C .
4. Треугольник AHL прямоугольный, и P — середина его гипотенузы, поэтому треугольник LPH равнобедренный и ∠PLH = ∠PHL= ∠AHL =∠C.
5. Сумма ∠AMK (= ∠TMS) и ∠PLH (= ∠TLS) равна 180°, следовательно, четырёхугольник TMSL является вписанным.
6. Углы BMC и BLC — прямые, опирающиеся на BC, поэтому четырёхугольник BMLC вписан в окружность с диаметром BC. Во вписанном четырёхугольнике BMLC: ∠BML = 180° -∠ACB= 180° -∠C. Отсюда ∠AML = 180° -∠BML=∠C =∠TML .
7. Углы TSL и TML равны, как вписанные, опирающиеся на общую хорду TL в описанной окружности четырёхугольника TMSL, поэтому ∠TSL = ∠C.
8. Прямые ST и AK параллельны, так как образуют с прямой BL углы TSL и AHL, величины которых равны величине угла ACB. При этом AK, как высота, перпендикулярна стороне BC, значит и ST перпендикулярна стороне BC.

Критерии оценивания. Доказано, что четырёхугольник TMSL является вписанным: 3 балла.

11.5. Пусть $a_{1,}a_{2,}...,a_n$ - произвольные действительные числа. Доказать, что найдётся натуральное $k, 1 \le k \le n$ такое, что все k средних арифметических $\frac{a_1+...+a_k}{k}, \frac{a_2+...+a_k}{k-1}, ..., \frac{a_{k-1}+a_k}{2}, \frac{a_k}{1}$ не превосходят $\frac{a_1+...+a_n}{n}$.

Доказательство. Для каждого $i=1,2,..,n$ обозначим среднее арифметическое чисел $a_{1,}a_{2,}...,a_i$ через S_i. Докажем, что в качестве искомого можно взять любое k такое, что S_k минимально среди всех $S_{1,}S_{2,}...,S_n$. Для любого $i=1,2,..,k$ запишем: $k \cdot S_k = a_1 + .. + a_i + a_{i+1} + .. + a_k = i \cdot S_i + a_{i+1} + .. + a_k$, откуда $a_{i+1} + .. + a_k = k \cdot S_k - i \cdot S_i \le k \cdot S_k - i \cdot S_k$ и $\frac{a_{i+1}+..+a_k}{k-i} \le S_k \le S_n = \frac{a_1+...+a_n}{n}$, что и требовалось доказать.

Замечание. При этом k естественно, может оказаться не единственным.

Критерии оценивания. Утверждение о том, что в качестве искомого можно взять любое k такое, что S_k минимально среди всех $S_{1,}S_{2,}...,S_n$ без обоснования: 1 балл.

Критерии определения победителей и призеров
Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике
(2015-2016 уч. год)

Согласно Положению победители и призеры олимпиады были определены по результатам Заключительного этапа Олимпиады. Общее количество победителей и призеров составило 380 человек из 1578 участников, что составляет 24,08 %. Количество победителей составило 85 человек, что составляет 5,38 %.

Основываясь на **общем рейтинге** участников и учитывая **наличие заметных разрывов** в баллах, набранных группами участников в верхней части рейтинга, жюри Олимпиады разработало следующие критерии определения победителей и призеров:
Максимальное возможное количество баллов – 35 баллов.

11 класс:

победители:
участники, набравшие более 77% от максимального количества баллов, т.е. от 27 до 35 баллов;
призеры:
2 степени – более 62 % от максимального количества баллов, т.е. от 22 до 26 баллов
3 степени – более 51 % от максимального количества баллов, т.е. от 18 до 21 баллов

10 класс:

победители:
участники, набравшие более 85 % от максимального количества баллов, т.е. от 30 до 35 баллов;
призеры:
2 степени – более 62 % от максимального количества баллов, т.е. от 22 до 29 баллов
3 степени – более 51 % от максимального количества баллов, т.е. от 18 до 21 баллов

9 класс:

победители:
участники, набравшие более 85 % от максимального количества баллов, т.е. от 30 до 35 баллов;
призеры:
2 степени – более 65 % от максимального количества баллов, т.е. от 24до 29 баллов
3 степени – более 51 % от максимального количества баллов, т.е. от 18 до 23 баллов

8 класс:

победители:
участники, набравшие более 82% от максимального количества баллов, т.е. от 29 до 35 баллов;
призеры:
2 степени – более 62 % от максимального количества баллов, т.е. от 22 до 28 баллов
3 степени – более 48 % от максимального количества баллов, т.е. от 17 до 21 баллов

7 класс:

победители:
участники, набравшие более 85 % от максимального количества баллов, т.е. от 30 до 35 баллов;
призеры:
2 степени – более 71 % от максимального количества баллов, т.е. от 24 до 29 баллов
3 степени – более 42 % от максимального количества баллов, т.е. от 15 до 21 баллов

Сопредседатель жюри по математике А.Ю.Авдюшенко