XXVII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

отборочный тур, решения

2020

до 16 января

---

9 класс

---

1. Какой из объектов быстрее проходит расстояние по орбите, равное своему диаметру, и во сколько раз: Земля или «горячий юпитер» с большой полуосью орбиты 0.05 а.е. и радиусом 90 тысяч км, обращающийся вокруг звезды с массой, равной массе Солнца?

Решение (8 баллов):

Средняя скорость обращения Земли по орбите составляет около 30 км/с. Рассчитать эту величину несложно, если разделить длину земной орбиты на продолжительность года:

$$v_\oplus = \frac{2\pi a_\oplus}{T_\oplus} \approx \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 1.5 \cdot 10^8}{365.24 \cdot 86400} \approx 29.8 \text{ км/с}.$$

Диаметр Земли равен приблизительно $2 \cdot 6400 = 12800$ км, тогда промежуток времени, за который Земля проходит свой диаметр, равен

$$\Delta T_\oplus = \frac{12800}{30} \approx 4.3 \cdot 10^2 \text{ с}.$$

Определим скорость вращения горячего юпитера. По третьему закону Кеплера, записанному для системы единиц «год — а.е. — масса Солнца», определим период обращения планеты

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{1} \implies T = \sqrt{a^3} = \sqrt{0.05^3} \approx 0.011 \text{ г}.$$

Средняя скорость движения планеты

$$v = \frac{2\pi a}{T} \approx \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 0.05 \cdot 1.5 \cdot 10^8}{0.11 \cdot 365.24 \cdot 86400} \approx 1.4 \cdot 10^2 \text{ км/с}.$$

Время, за которое планета проходит свой диаметр:

$$\Delta T = \frac{2 \cdot 90000}{140} \approx 12.9 \cdot 10^2 \text{ с}.$$

Таким образом, Земля проходит свой диаметр быстрее в $12.9/4.3 \approx 3$ раза.

2. Определите высоту верхней кульминации одной из самых известных далеких галактик MACSJ0647+7015 (прямое восхождение $\alpha = 6^h 47^m$, склонение $\delta = 70°15'$), находящейся в созвездии Жирафа, при наблюдении с сопки Халтиатунтури (граница Финляндии и Норвегии, широта $\varphi = 69°19'$, долгота $\lambda = 21°17'$).

Решение (8 баллов):

Так как склонение галактики по модулю превышает широту места наблюдения, это означает, что верхняя кульминация будет происходить к северу от зенита. Значит, высота верхней кульминации вычисляется как: $h_{max} = 90° + \varphi - \delta = 90° + 69°19' - 70°15' = 89°04'$.

3. Наблюдатель на экваторе заметил, что некоторый спутник прошел через зенит в полночь, в 8 часов утра и в 16 часов вечера по местному времени. Определите радиус орбиты спутника, считая ее круговой.

Решение (8 баллов):

Синодический период S спутника относительно наблюдателя равен 8 часам. Обозначим сидерический период его обращения через T, период обращения Земли вокруг своей оси через $T_\oplus$, тогда верно равенство

$$S = \frac{TT_\oplus}{T_\oplus \pm T} \quad \text{или} \quad T = \frac{ST_\oplus}{T_\oplus \pm S} = 6 \text{ или } 12 \text{ часов.}$$

Соответствующие радиусы орбит можно найти из III закона Кеплера, например, сравнив спутник с Луной:

$$a = a_☾ \cdot \left(\frac{T}{T_☾}\right)^{2/3}.$$

Подставляя числа, получаем ответы: 16.8 и 26.7 тысяч километров.

4. Планета движется вокруг звезды по круговой орбите радиусом 2 а.е. со скоростью 15 км/с. Во сколько раз масса звезды меньше массы Солнца?

Решение (8 баллов):

Наиболее быстро эту задачу можно решить, сопоставив параметры движения планеты и Земли. Средняя скорость движения Земли по орбите составляет около 30 км/с. При этом для круговой орбиты центростремительное ускорение равно ускорению вследствие гравитации:

$$a_c = a_g \quad \Longrightarrow \quad \frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}},$$

здесь r — расстояние от планеты до звезды, M — масса звезды.

Отсюда отношение скоростей планеты и Земли

$$\frac{v}{v_\oplus} = \frac{\sqrt{\frac{GM}{r}}}{\sqrt{\frac{GM_\odot}{r_\oplus}}} = \sqrt{\frac{M}{M_\odot}} \cdot \sqrt{\frac{r_\oplus}{r}}.$$

Тогда масса звезды равна

$$M = \frac{v^2}{v_\oplus^2} \cdot \frac{r}{r_\oplus} M_\odot = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot M_\odot = 0.5 M_\odot.$$

Таким образом, звезда имеет вдвое меньшую массу, чем Солнце.

Задачу можно было решать и иначе: после того, как была получена формула связи круговой скорости, массы звезды и радиуса орбиты, можно было подставить в нее данные в условиях значения в одинаковой системе единиц (например, в СИ), то есть вычислить

$$M = \frac{v^2 r}{G},$$

а затем поделить полученное значение на массу Солнца ($2 \cdot 10^{30}$ кг).

5. Некоторая звезда имеет годичный параллакс $\pi = 0''.0073$ и видимую звездную величину $m = 2^m.84$. Найдите ее абсолютную звездную величину.

Решение (8 баллов):

Абсолютная звездная величина звезды M, видимая звездная величина m и расстояние до звезды r, выраженное в парсеках, связаны зависимостью

$$M = m - 5 \lg r + 5.$$

Поскольку годичный параллакс звезды в секундах π и расстояние до нее в парсеках обратны друг другу, $r = 1/\pi$, то

$$M = m + 5 \lg \pi + 5 \approx -2^m.8.$$