

XXVII Санкт-Петербургская  
астрономическая олимпиада  
практический тур, решения

2020  
1  
марта

5–6 классы

Вам дана фотография (негатив), сделанная космическим аппаратом, на которой запечатлен Юпитер и два его спутника: Европа (ближе) и Ио (дальше). На Юпитере видны тени, отбрасываемые спутниками. Оцените расстояние между космическим аппаратом и Европой, а также между Европой и Ио.

Известно, что Ио находится на расстоянии 420 тысяч километров от центра Юпитера. Экваториальный радиус Юпитера в 11 раз больше радиуса Земли, радиусы Европы и Ио можно считать одинаковыми и равными  $1/4$  радиуса Земли.

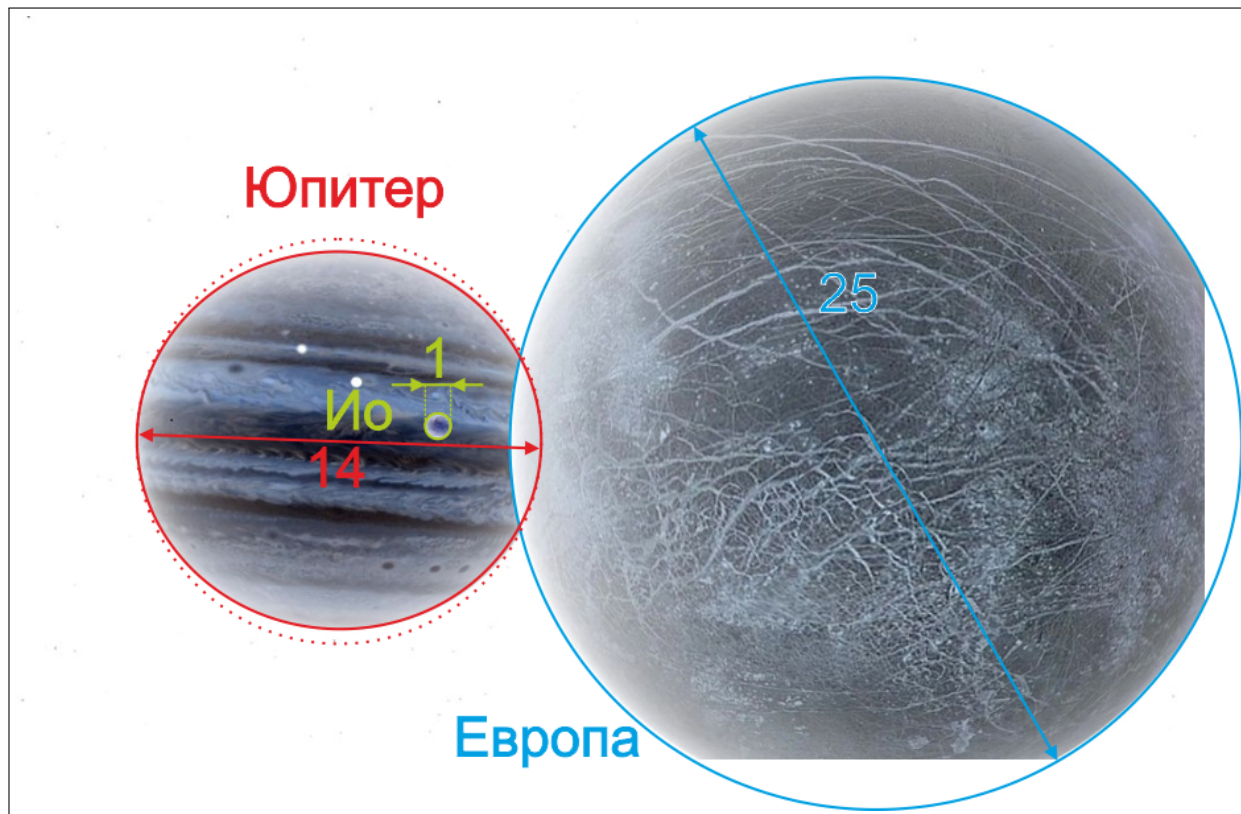


**Решение (20 баллов):**

Из условия задачи следует, что линейный диаметр Юпитера в 44 раза больше, чем линейный диаметр Ио или Европы, что можно записать как  $d_J = 44d_I$ ,  $d_I = d_E$ . Однако космический аппарат (КА) находится на некотором расстоянии от рассматриваемых в задаче объектов, т.е. «видит» их под некоторыми углами. Соответственно, по фотографии мы можем измерить лишь угловые диаметры планеты и спутников.

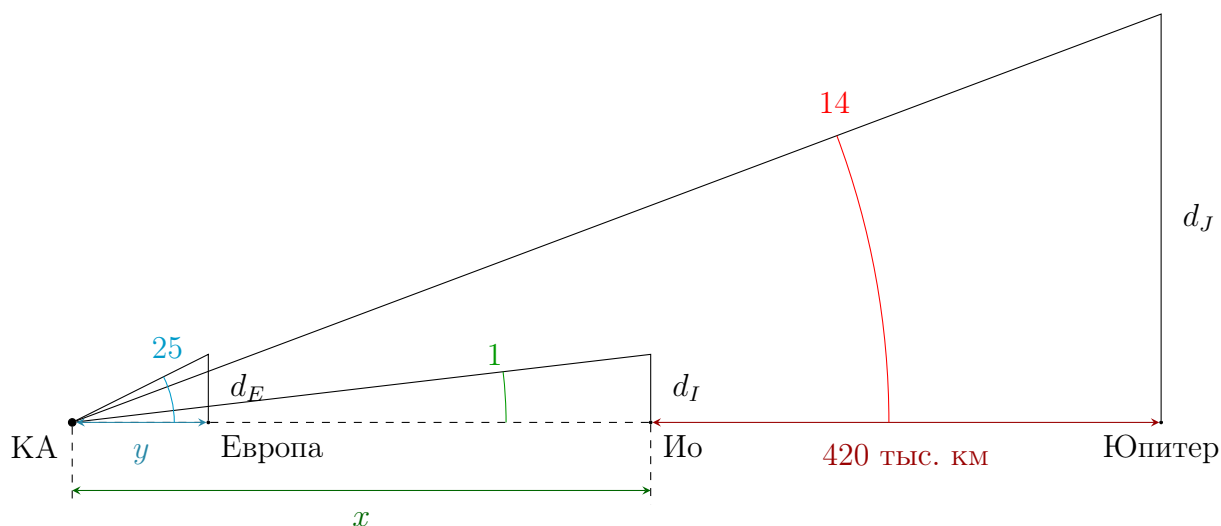
На фото хорошо видно полярное сжатие Юпитера (из-за быстрого вращения вокруг своей оси он сплюснут у полюсов), поэтому для измерения экваториального диаметра Юпитера необходимо «дорисовать». Если измерять линейкой полярный радиус Юпитера и считать его равным экваториальному, то это повлечет небольшие ошибки в определении расстояний.

Также необходимо измерить диаметры спутников. С Ио проблем не возникает: он достаточно отчетливо выделяется на фоне Юпитера, а вот с Европой есть небольшая загвоздка. Спутник освещен Солнцем справа, а слева виднеется неосвещенная часть, однако поскольку Европа загораживает Юпитер, то ее левая граница видна отчетливо. Но правый край Европы не попал в поле зрения, так что наиболее точным способом измерения диаметра этого спутника является измерение по диагонали, что показано на изображении ниже. Специально обозначено отличие «шарообразного» Юпитера (красная пунктирная окружность) и реального (красный сплошной эллипс).



Примем угловой диаметр Ио за единицу:  $\alpha_I = 1$ . Тогда угловой экваториальный диаметр Юпитера составит 14 единиц ( $\alpha_J = 14\alpha_I$ ) (полярный — 12.5), а Европы — 25 ( $\alpha_E = 25\alpha_I$ ). Поэтому если при измерениях на картинке из условия размер Ио на фото получился 4 мм, то экваториальный диаметр Юпитера должен получиться 56 мм (полярный, соответственно, 50 мм), а Европы — 100 мм.

Для облегчения расчетов будем считать, что все четыре объекта (Юпитер, спутники и космический аппарат) находятся на одной линии. Тогда можно нарисовать схему (масштаб не соблюден):



Вертикальными линиями обозначены экваториальные диаметры рассматриваемых объектов, горизонтальными — расстояния между этими объектами. Цветными дугами и числами рядом с ними — угловые размеры объектов по отношению к Ио (его угловой размер мы договорились считать за единицу). Для краткости обозначим расстояние от КА до Ио за  $x$ , а от КА до Европы — за  $y$  и будем измерять эти расстояния также в тысячах километров. Очевидно, что в таком случае расстояние от Европы до Ио будет равно  $(x - y)$  тысяч километров.

Будем считать, что все углы на фото небольшие (меньше 30 градусов), поэтому можно пользоваться простым приближением:

$$\frac{\alpha}{57.3^\circ} = \frac{d}{L},$$

где  $\alpha$  — угловой диаметр объекта в градусах,  $57.3^\circ$  — количество градусов в одном радиане (можно считать равным  $60^\circ$ ),  $d$  — линейный диаметр объекта,  $L$  — расстояние до объекта. Эту формулу можно использовать как известную в том или ином виде (например, когда речь идет не о градусах, а об угловых секундах, соответственно, в знаменателе будет  $206265''$  или  $2 \cdot 10^5$  секунд).

Запишем эту пропорцию для Ио и для Юпитера, а также вспомним соотношение между их угловыми размерами:

$$\frac{\alpha_I}{57.3^\circ} = \frac{d_I}{x}; \quad \frac{\alpha_J}{57.3^\circ} = \frac{d_J}{x + 420}; \quad \alpha_J = 14\alpha_I.$$

Тогда, выразив из первого и второго уравнений угловые размеры и подставив их в третье соотношение, получим пропорцию:

$$\frac{14d_I}{x} = \frac{d_J}{x + 420}.$$

Мы помним, что  $d_J = 44d_I$ , значит, приходим к окончательному уравнению относительно  $x$  и решаем его:

$$\frac{14}{x} = \frac{44}{x + 420} \quad \Rightarrow \quad 14x + 14 \cdot 420 = 44x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{14}{30} \cdot 420 = 196 \text{ тыс. км.}$$

Аналогичным образом составим пропорции для Ио и Европы (их линейные диаметры одинаковы), получим уравнение и решим его:

$$\frac{\alpha_I}{57.3^\circ} = \frac{d_I}{x}; \quad \frac{\alpha_E}{57.3^\circ} = \frac{d_E}{y}; \quad \Rightarrow \quad \frac{25}{x} = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{25} \approx 7.8 \text{ тыс. км.}$$

Тогда расстояние между Европой и Ио составляет  $x - y = 188.2$  тыс. км.

На всякий случай проверим (во время олимпиады этого было делать не обязательно), что приближение малых углов, использованное нами, действительно выполняется. Считая, согласно условию задачи, диаметр Европы равным 3200 км, можно заключить (по той же самой формуле), что ее угловой размер на фото равен  $\alpha_E = 23^\circ.5$ , что удовлетворяет нашему приближению, поскольку остальные объекты имеют меньшие угловые размеры.