XXVII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

отборочный тур, решения

2020

до 16 января

11 класс

1. Два малых тела с массами, равными 1 кг, находятся на расстоянии 1 м друг от друга. Через какое время эти два тела столкнутся? Всеми силами, кроме гравитационных между самими телами, пренебречь.

Решение (8 баллов):

Можно, конечно, строго записать уравнения движения для этой задачи, но делать это вовсе не нужно — это обыкновенная задача двух тел, решение которой известно. Рассмотрим любое из двух тел. Оно будет двигаться по вырожденному эллипсу, один из фокусов которого — центр масс двух тел. Время сближения равно половине периода. Запишем III закон Кеплера:

$$\frac{T^2}{A^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_1+M_2)} \Rightarrow \frac{(2t)^2}{\left(\frac{R}{2}\right)^3} = \frac{4\pi^2}{2GM_1}$$

$$t = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{R^3}{GM_1}} \approx 27^h.$$

Комментарии:

Некоторые участники смогли довести до правильного ответа «лобовое» решение дифференциального уравнения движения, такое решение (если оно не имело других недостатков) также оценивалось полным баллом. Однако просто попытка написать дифференциальное уравнение, которое не удалось решить, оценивалась как попытка решения задачи, не давшая результата.

Поскольку точность исходных данных очень невелика (формально она порядка самих данных), то ответ имеет смысл получать с порядковой точностью. Попытка вычислить результат с точностью разрядной сетки калькулятора приводила к снятию баллов.

Попытка посчитать результат по формулам для движения с постоянным ускорением оценивалась не более чем 1–2 баллами. Однако (с учетом замечания выше) если при этом автор работы показывал, что точности такой простейшей модели достаточно для получения результата с требуемой погрешностью, такое решение оценивалось полным баллом.

2. Тело Солнечной системы, вращающееся вокруг Солнца по круговой орбите в плоскости эклиптики, сближается с Сатурном на минимальное расстояние каждые 4 года. Чему равно это расстояние?

Решение (8 баллов):

С одной стороны, можно сказать, что 4 года — это период повторений одинакового взаимного положения данного тела и Сатурна (синодический период), и по этим данным вычислить сидерический период тела для двух случаев — когда движение тела вокруг Солнца является прямым или ретроградным. Однако можно и упростить решение, если учесть, что орбитальный период Сатурна существенно превышает 4 года (около 30 лет), а это означает, что для интересующего нас тела синодический и сидерический периоды с достаточной точностью совпадают.

Тогда радиус орбиты тела составляет $4^{2/3} = 2.5$ а.е. и, поскольку большая полуось орбиты Сатурна составляет около 9.5 а.е., минимальное расстояние — 7 а.е. Давать ответ с большей точностью бессмысленно, поскольку из-за эксцентриситета орбиты Сатурна расстояние от Солнца до Сатурна меняется в пределах от 9.0 а.е. до 10.1 а.е., тем самым минимальное расстояние может меняться в пределах 1 а.е.

Комментарии:

Как и в предыдущей задаче, баллы снимались за избыточную точность. К потере баллов приводило также отсутствие рассмотрения случая ретроградной орбиты (без обоснования того, что требуемая точность результата позволяет обойтись без рассмотрения этого отдельного случая).

3. Однажды максимальная северная либрация Луны по широте совпала с максимальной западной либрацией по долготе. Через сколько суток это произойдет в следующий раз?

Решение (8 баллов):

Либрация Луны по широте вызвана тем, что ось вращения Луны наклонена к плоскости ее орбиты. Следовательно, период повторения «одноименных» либраций по широте равен периоду прохождения Луны через один и тот же узел ее орбиты. Этот период носит название «драконический месяц» и равен примерно $T_d = 27.21222$ средних солнечных суток.

Причиной либрации Луны по долготе является эллиптичность лунной орбиты. Таким образом, период либраций по долготе равен промежутку времени между последовательными прохождениями Луны через перигей орбиты. Этот промежуток равен примерно $T_a = 27.55455$ средних солнечных суток и называется «аномалистический месяц».

Вычислим синодический период для этих двух периодов:

$$S = \left| \frac{1}{T_d} - \frac{1}{T_a} \right|^{-1} = 2190.344 \text{ суток.}$$

По прошествии синодического периода оба колебания положения Луны снова совпадут по фазе. Но нам недостаточно выполнения этого условия — по условию задачи надо, чтобы при этом фаза каждого колебания совпала с исходной. Вычислив, сколько драконических и аномалистических месяцев пройдет за синодический период, получим около 80.5 и 79.5. Это означает, что после истечения одного синодического периода совпадут максимальная южная либрация по широте и восточная по долготе, а совпадение исходных фаз произойдет через два синодических периода, т.е. примерно через 4381 сутки (т.е., почти точно через 12 лет).

Комментарии:

Существенной деталью решения являлся учет совпадения фаз колебаний. Типовое решение с ответом около 2190 суток, не учитывающее это обстоятельство, оценивалось не более чем 6 баллами.

4. Недавно была зарегистрирована вспышка в радиодиапазоне от магнетара XTE J1810-197. Было обнаружено, что радиолиния на частоте $6.5 \cdot 10^2$ МГц расширена, сигнал регистрировался на частотах с $6.0 \cdot 10^2$ до $7.0 \cdot 10^2$ МГц. Считая, что уширение линии было вызвано вращением магнетара, оцените линейную скорость движения точек на экваторе магнетара.

Решение (8 баллов):

Когда мы смотрим на вращающееся тело, то один край от нас удаляется (и сигнал от него смещается для нас в «красную» сторону), а другой — приближается (вызывая смещение сигнала в «синюю» сторону). Так как линейная скорость краев магнетара одинаковая, то можно записать формулу эффекта Допплера:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c},$$

где $\Delta\nu$ — смещение сигнала в одну сторону (в нашем случае 50 МГц в «красную» и столько же в «синюю» сторону), ν — лабораторная частота сигнала, v — скорость движения края магнетара, c — скорость света ($3 \cdot 10^5$ км/с). Отсюда выражаем скорость:

$$v = c\,\frac{\Delta\nu}{\nu} = 3 \cdot 10^5 \cdot \frac{50}{650} \approx 2 \times 10^4 \text{ км/с}.$$

Однако это только нижняя оценка возможной скорости, оказывающаяся точной только в том случае, если ось вращения магнетара перпендикулярна к лучу зрения. Если это условие не выполнено, то найденная величина — это только проекция искомой скорости на луч зрения, а сама скорость, как следствие, может оказаться и больше. Поэтому ответ — не менее $2 \cdot 10^4$ км/с.

В принципе, при решении можно использовать и формулу релятивистского эффекта Допплера, однако при имеющейся точности данных это излишне, ответ получается с указанной точностью таким же.

Комментарии:

К сожалению, очень немногие участники учли, что полученная оценка скорости — это только оценка снизу. В остальном оценивание какими-либо особенностями не отличалось, кроме почти полного снятия баллов в том случае, если полученная скорость вращения магнетара превышала скорость света (и автор решения не находил в этом ничего особенного).

5. Некоторая звезда имеет температуру $48 \cdot 10^3$ К и радиус 1.5 радиуса Солнца, она находится на расстоянии 3.2 кпк от Солнца в направлении центра Галактики. Какую видимую звездную величину имеет звезда для наблюдателя с Земли, если поглощение света в плоскости Галактики составляет 2^m/кпк?

Решение (8 баллов):

Определим светимость звезды по закону Стефана–Больцмана:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4, \quad \frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4 = (1.5)^2 \left(\frac{48000}{5800}\right)^4 \approx 1.1 \cdot 10^4.$$

Сопоставим звезду с Солнцем, определим ее абсолютную звездную величину:

$$M - M_\odot = -2.5 \lg \frac{L}{L_\odot} \approx -10.$$

Отсюда $M = -10 + 4.8 = -5.2$. Видимая звездная величина связана с абсолютной звездной величиной и расстоянием до звезды:

$$m = M - 5 + 5 \lg r + A \cdot \frac{r}{10^3} = -5.2 - 5 + 5 \lg 3.2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 3.2 \approx 14^m.$$

Комментарии:

Единственной особенностью оценивания являлось обнуление баллов за задачу при получении очевидно нелепого результата (например, когда видимая звездная величина оказывалась равной $m = -41^m$.

Некоторые участники обратили внимание на то, что звезда имеет не совсем обычные параметры (и получили за это бонусные баллы). Это действительно сравнительно редкий объект — голубой субкарлик. «Прототипом» звезды из задачи послужил главный компонент двойной системы HD 49798, перенесенный на большее, чем в реальности, расстояние от Солнца.