XXVII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2020

2 февраля

10 класс

1. Звезда R Андромеды — пульсирующая звезда, меняющая свой блеск с периодом 409 суток. Ее можно увидеть невооруженным глазом только в максимуме блеска, в минимуме блеска ее видимая звездная величина равна 16^m, при этом в один из этих моментов звезда имеет радиус, равный $5 \cdot 10^2$ радиуса Солнца. Считая, что во время пульсаций температура звезды не меняется, оцените среднюю скорость движения оболочки звезды.

Решение (8 баллов):

Человек с нормальным зрением может видеть звезды до 6^m, значит блеск меняется на 10^m. Соответственно, светимость звезды меняется в $(10^2)^2 = 10^4$ раз.

Понятно, что чем больше площадь поверхности звезды, тем больше ее светимость. Площадь поверхности пропорциональна радиусу в квадрате, значит, радиус при прочих равных должен меняться в 100 раз. Таким образом заключаем, что либо максимальный радиус звезды равен 50000 радиусов Солнца (т.е. около 250 а.е.), либо минимальный радиус звезды равен 5 радиусов Солнца. Первый вариант совершенно нереалистичен, так как это слишком много даже для красных сверхгигантов, следовательно, правилен второй вариант.

Будем считать, что звезда половину времени уменьшается в размерах, а половину времени — расширяется. Тогда достаточно поделить 495 радиусов Солнца на 204.5 дня и получить ответ:

$$v = \frac{495}{204.5} = 2.4 \text{ радиуса Солнца/сутки} \approx 20 \text{ км/с}.$$

2. Кислородная атмосфера Реи содержит $(2.5 \pm 0.5) \times 10^{29}$ молекул. Оцените давление этой атмосферы у поверхности Реи, если радиус Реи равен 764 км, а ее средняя плотность равна 1.24 г/см^3.

Решение (8 баллов):

Давление, создаваемое атмосферой у поверхности, можно получить, если вычислить силу тяжести, действующую на столб газа в атмосфере с единичной площадью основания. Поскольку характерные высоты атмосфер («высота однородной атмосферы») всегда сравнительно невелики (в противном случае атмосфера очень быстро улетит от объекта, рядом с которым находилась), можно считать, что гравитационное ускорение, действующее на все молекулы атмосферы, примерно одинаково и совпадает с ускорением свободного падения на поверхности Реи. Тогда искомое давление можно выразить как

$$p = \frac{M_a g}{4\pi R^2},$$

где M_a — масса атмосферы, g — гравитационное ускорение на поверхности (вращение Реи, как у всех крупных спутников планет в Солнечной системе, синхронизировано с обращением вокруг планеты, так что «центробежной» частью ускорения свободного падения можно пренебречь), R — радиус Реи.

Отсюда

$$p = \frac{M_a G M}{4\pi R^4} = \frac{NmG4\pi R^3\rho}{3\cdot 4\pi R^4} = \frac{NmG\rho}{3R} = \frac{N\mu G\rho}{3RN_A}.$$

Тут G — гравитационная постоянная, M — масса Реи, ρ — ее средняя плотность, m — масса молекулы кислорода, $\mu = 32$ г/моль — молярная масса молекулярного кислорода и $N_A = 6\cdot 10^{23}$/моль — число Авогадро.

Осталось вычислить ответ, не забыв при этом, что по крайней мере один из сомножителей (число молекул кислорода в атмосфере Реи) известен нам с очень плохой точностью, возможная ошибка составляет 20% величины, а это означает, что более одной значащей цифры в вычислениях нам заведомо не потребуется. В итоге получим 5×10^{-10} Па.

3. Известно, что за последние 20 лет моменты прохождения Землей перигелия своей орбиты менялись в пределах от 4 часов 2 января до 11 часов 5 января (по московскому времени). А в каком примерно году в последний раз это событие могло случиться в новогоднюю полночь по тому же времени? Период вращения линии апсид орбиты Земли составляет около 112 тыс. лет.

Решение (8 баллов):

Для начала попробуем понять причину столь сильного изменения момента прохождения перигелия за последние 20 лет. Первый же напрашивающийся ответ — високосные годы (и их отсутствие), смещающие момент максимум на 18 часов. Однако разброс моментов явно больше, и очевидно, что линия апсид (соединяющая перицентр и апоцентр орбиты) для орбиты Земли не меняет свое положение с такой скоростью (тем более что из условия не следует, что дата/время прохождения перигелия систематически уменьшались или увеличивались), следовательно, причина в чем-то другом. Единственным фактором, который может мешать Земле летать строго по эллиптической орбите на таких масштабах времени, является Луна, и именно из-за нее Земля подходит на минимальное расстояние к Солнцу не очень регулярно. Однако одинаковое взаимное расположение Земли, Солнца и Луны повторяется с периодом около 18 лет («сарос»), поэтому разброс за 20 лет — это максимум того, что может обеспечить Луна, и этого фактора очевидно не хватает для нужного нам результата. Нужно что-то другое, систематически меняющее момент прохождения перигелия.

Следующий по значимости фактор — прецессия оси вращения Земли. Из-за нее тропический год короче, чем сидерический год (период обращения Земли вокруг Солнца), недаром слово «прецессия» означает «предварение» (равноденствий). Поэтому если бы средний период между прохождениями перигелия (аномалистический год) совпадал бы с сидерическим годом, то момент каждого очередного прохождения перигелия в среднем смещался бы на все более позднюю дату/время по нашей школе времени, привязанной к тропическому году. Величину смещения за год можно оценить, вспомнив, что период прецессии равен около 26 тысяч лет, или используя т.н. «постоянную прецессии» (около $50''$/год). Смещение за год составит $\approx 1/(26\cdot 10^3)$ года, это около 20 минут времени.

Второй из нужных нам факторов — указанное в условии вращение линии апсид. Оно происходит в том же направлении, что и обращение Земли вокруг Солнца, поэтому аномалистический год на самом деле несколько длиннее сидерического. Как следствие, этот эффект складывается с предыдущим, хотя он и в несколько раз меньше. Его легче всего оценить, зная, что период вращения линии апсид в $112/26 = 4.3$ раза больше, чем период прецессии, соответственно, смещение, связанное с этим эффектом, в то же число раз меньше и составляет около $20/4.3 \approx 5$ минут. В итоге при смещении на один год в прошлое момент прохождения перигелия приближается примерно на 25 минут к новогодней полуночи.

На этом физически значимые эффекты заканчиваются (все остальное существенно слабее), но возникает дополнительная неприятность, о которой тоже следовало бы подумать.

Все выкладки выше получены в предположении, что тропический и календарный год — это одно и то же. Однако на самом деле это не так, поскольку средняя продолжительность календарного года даже в григорианском календаре на достаточно больших интервалах времени (до века, а иногда — и двух) больше продолжительности тропического. Разница, как известно, составляет около 3 суток за 400 лет, поэтому такой календарный год в среднем на $3 \cdot 24 \cdot 60/400 = 11$ минут длиннее тропического, и этот фактор работает в другую сторону, чем предыдущие (хотя и не компенсирует их полностью). Поэтому в среднем смещение момента прохождения перигелия составляет всего $25 - 11 = 14$ минут в год.

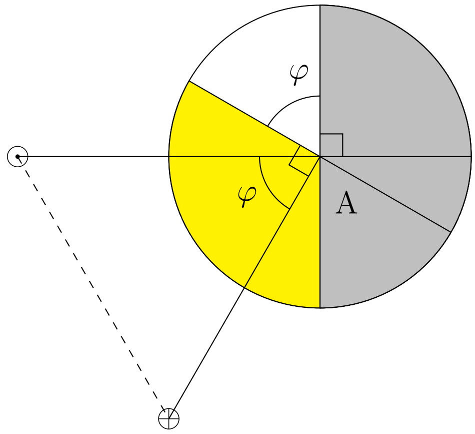
Вычислим результат. Самый близкий за последние 20 лет момент прохождения перигелия отстоял от новогодней полуночи на 28 часов, т.е. 1680 минут, $1680/14 = 120$, следовательно, подобное событие могло произойти около 120 лет назад плюс-минус 20 лет. Как раз тогда григорианский календарный год в последний (пока) раз отличался от юлианского, так что оценка средней продолжительности календарного года была вполне правомерной.

Есть, впрочем, еще одно обстоятельство, которое, если относиться к понятию «московское время» буквально, добавляет сложностей в получении ответа: можно задуматься над тем, что такое «московское время» более 100 лет тому назад. Если вспомнить, что 102 года назад Россия перешла с юлианского календаря на григорианский, то можно отметить, что с большой вероятностью при этом момент прохождения перигелия, не успев попасть на новогоднюю ночь, «проскочил» на декабрь, и в следующий раз попадет на новогоднюю ночь очень не скоро (причем возникнет вопрос, где эта ночь будет располагаться — начало года было перенесено на 1 января Петром I, до этого год начинался 1 сентября...). С учетом этого обстоятельства ответ становится таким: данное событие могло произойти в новогоднюю полночь, начиная с 1919 года и до примерно 1975 года. Нижняя граница обусловлена средней оценкой и устройством календаря (появлявшееся по дороге декретное время мало что изменит), а верхняя возникнет при максимальном везении — когда за счет удачного расположения високосных лет 18 часов из необходимого сдвига в 28 часов будут убраны и останется сдвинуться только на 10 часов, что соответствует $10 \cdot 60/14 \approx 43$ годам.

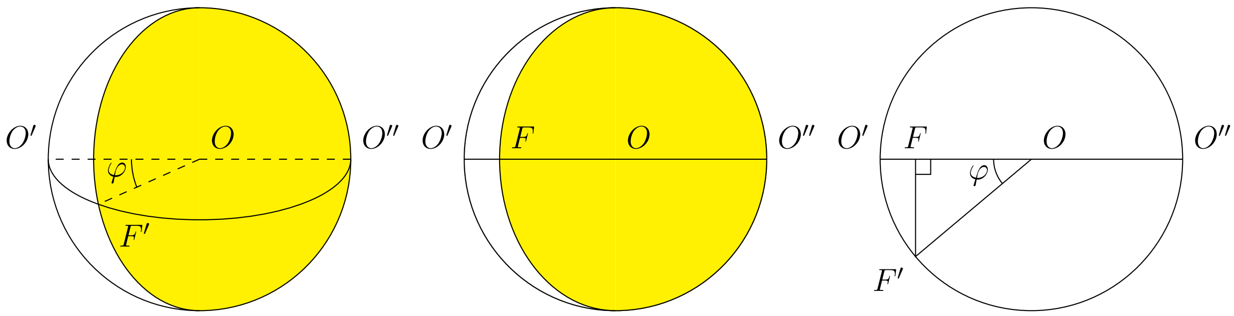
4. Абсолютной звездной величиной объекта Солнечной системы называется видимая величина, которую имел бы объект, если бы он находился на расстоянии 1 а.е. и от Солнца, и от наблюдателя и имел полную фазу. Предположим, что в некоторый момент шарообразный астероид оказался на расстоянии 1 а.е. от Солнца и от Земли. На сколько звездных величин будут отличаться его видимая и абсолютная звездные величины? Считайте, что блеск астероида прямо пропорционален площади освещенной части диска.

Решение (8 баллов):

Так как астероид находится на 1 а.е. как от Солнца, так и от Земли, а Земля также находится на расстоянии 1 а.е. от Солнца, то Солнце, Земля и астероид образуют равносторонний треугольник, все углы в котором равны 60°. Следовательно, и т.н. фазовый угол (угол при астероиде) равен $\varphi = 60°$. Для определения фазы Φ (отношения освещенной части диаметра к полному диаметру) через фазовый угол можно воспользоваться готовой формулой, а можно и вывести эту формулу, например, так, как показано ниже (астероид A для наглядности сильно увеличен).



Угол, стягивающий сектор, закрашенный белым на рисунке, а, следовательно, и двугранный угол, «вырезающий» часть площади, освещенную Солнцем и не видимую с Земли, равен φ (см. ниже рис. а).



а б в

При проецировании изображения астероида на небесную сферу получится «овал», изображенный на рис. б, наибольшая ширина освещенной части которого $O''F$ определяется как $OO'' + OF$ (рис. в). $OO'' = OO' = OF' = R_A$, где R_A — радиус изображения астероида на небе.

$$O''F = OO'' + OF = OO'' + OF' \cos\varphi = R_A(1 + \cos\varphi).$$

Фаза Φ — это отношение освещенной части диаметра к полному диаметру, следовательно,

$$\Phi = \frac{R_A(1 + \cos\varphi)}{2R_A} = \frac{1 + \cos\varphi}{2}.$$

Таким образом, фаза астероида в момент наблюдения равна $\Phi = (1 + \cos 60^\circ)/2 = 0.75$.

Согласно условию, блеск астероида прямо пропорционален площади освещенной части диска. При фазе Φ отношение площади освещенной части к полной площади диска равно Φ. Этим фактом можно воспользоваться как известным, но можно и доказать его.

Из рис. б очевидно, что площадь «овала», который представляет собой изображение освещенной части диска астероида, видимой с Земли, равна сумме половины площади круга (полного диска) и половины площади эллипса, большой полуосью которого является радиус изображения астероида, а малой полуосью отрезок OF. Следовательно, отношение площади «овала» к полной площади диска равно

$$\frac{1/2\,\pi R_A^2 + 1/2\,\pi R_A \cdot OF}{\pi R_A^2} = \frac{R_A^2 + R_A \cdot R_A \cos\varphi}{2R_A^2} = \frac{1 + \cos\varphi}{2} = \Phi.$$

Следовательно, отношение блеска освещенной части астероида в фазе 0.75, соответствующего видимой звездной величине m_v, к блеску астероида в полной фазе, соответствующего абсолютной звездной величине m_a, равно 0.75. Таким образом, звездные величины отличаются на

$$\Delta m = m_v - m_a = -2.5 \lg 0.75.$$

Осталось разобраться с тем, как вычислить логарифм без калькулятора. Сделать это можно несколькими способами, приведем некоторые из них.

Во-первых, сразу отметим, что звездные величины — это на самом деле логарифмы освещенности (с точностью до константы) по основанию, равному $\sqrt[5]{100} = 10^{2/5} \approx 2.512\ldots$. Поэтому можно записать

$$\Delta m = -2.5 \lg 0.75 = -\log_{2.512} 0.75 = -\log_{2.512} \frac{7.5}{10} = \log_{2.512} 10 - \log_{2.512} 7.5 =$$
$$= 2.5 - \log_{2.512}(3 \cdot 2.5) \approx 2.5 - 2 = 0.5.$$

Более точный ответ можно получить, заметив, что $\sqrt[5]{100} \approx e = 2.718\ldots$, поэтому

$$\Delta m \approx -\ln 0.75 = -\ln(1 - 0.25) \approx 0.25,$$

так как $\ln(1 + x) \approx x$ для $|x| \ll 1$.

Этот результат можно еще улучшить, если аккуратно перейти от основания логарифма для шкалы звездных величин к основанию натуральных логарифмов, а не просто приравнять их. Переходный коэффициент равен $1/\ln\sqrt[5]{100} = 1.086\ldots$, и это число настолько часто встречается в разнообразных вычислениях, связанных с звездными величинами, что его полезно запомнить (впрочем, достаточно представлять, что это примерно 1.1, что легко можно вычислить уже изложенным выше способом). В интересующем нас случае уже полученный ответ нужно будет умножить на этот коэффициент (завысив основание логарифма, мы занизили его значение), в результате получится $\Delta m \approx 0.25 \cdot 1.1 = 0.275 \approx 0^m.3$. Добравшись до калькулятора и вычислив «точное» значение, мы получим $0^m.312\ldots$, так что наши вычисления логарифма в конечном счете оказались весьма неплохи — итоговая погрешность оказывается меньше $0^m.04$.

5. На поверхности Луны находится модуль, готовый ко взлету для стыковки с основным кораблем на круговой орбите (запас топлива ограничен). На горизонте появился главный корабль. Через какое время необходимо лунному модулю стартовать, в каком направлении и с какой скоростью, чтобы добраться до главного корабля и состыковаться с ним, потратив как можно меньше топлива? Все импульсы считать мгновенными. Высота орбиты основного корабля над поверхностью Луны равна 70 км.

Решение (8 баллов):

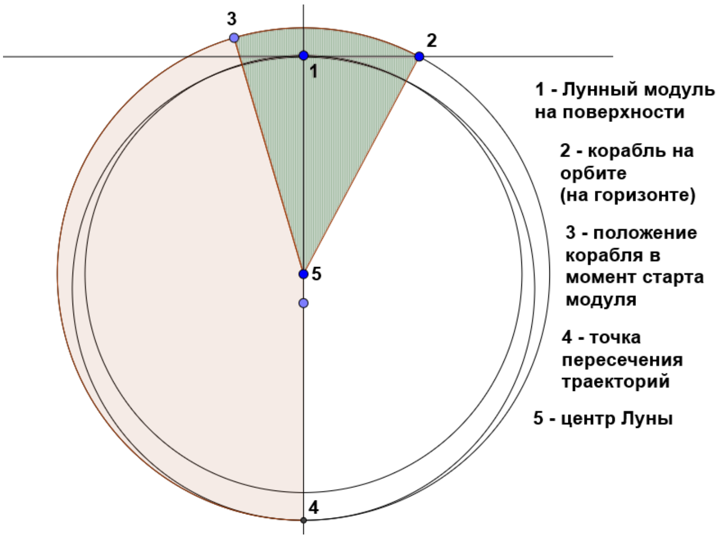
Наиболее выгодная траектория взлета — сразу поднять апоцентр орбиты до высоты орбиты основного корабля (аналогично ситуации с Гомановским эллипсом). В этом случае когда модуль будет в апоцентре, основной корабль окажется там же (конечно же, для успешной и безопасной стыковки лунный модуль должен будет в апоцентре разогнаться до первой космической скорости). Время, которое пройдет между взлетом и сближением — половина периода обращения по траектории взлета (эллипс с апоцентром на высоте орбиты корабля и перицентром на поверхности).

Для начала найдем период обращения основного корабля на орбите:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 (R+h)^3}{GM}} = \sqrt{\frac{39.48 \cdot (1.81 \cdot 10^6)^3}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 7.36 \cdot 10^{22}}} \approx 6.9 \cdot 10^3 \text{ с}$$

Сразу заметим, что это в несколько сотен раз меньше, чем период обращения Луны вокруг своей оси, поэтому вращением Луны можно пренебречь. Теперь найдем тот промежуток времени, за который лунный модуль достигнет точки рандеву (см. рисунок). Считая, что разгон был мгновенным, найдем время полета от поверхности до точки рандеву:

$$\Delta t_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 (R + \frac{h}{2})^3}{GM}} = \sqrt{\frac{9.87 \cdot (1.77 \cdot 10^6)^3}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 7.36 \cdot 10^{22}}} \approx 3.35 \cdot 10^3 \text{ с}$$



Тогда $\angle 354$ равен $\frac{\Delta t_1}{T} \approx 175^\circ$. Время, за которое основной корабль переместится из точки 2 в точку 3, и есть промежуток времени, через который после появления корабля на горизонте модулю нужно стартовать.

$$\angle 152 = \arccos \frac{R}{R+h} \approx 16^\circ; \angle 351 = 180^\circ - 175^\circ = 5^\circ$$
$$\angle 352 = \angle 351 + \angle 152 = 16^\circ + 5^\circ = 21^\circ$$

И наконец получим ответ на первый вопрос задачи:

$$\Delta t_0 = \frac{\angle 352}{360^\circ} T \approx 4 \cdot 10^2 \text{ с} \approx 7 \text{ мин}$$

Осталось лишь найти скорость старта — скорость в перицентре орбиты, но прежде найдем эксцентриситет орбиты:

$$e = \frac{r_a}{a} - 1 = \frac{R+h}{R+\frac{h}{2}} - 1 \approx 2 \cdot 10^{-2}$$

$$v_{start} = \sqrt{\frac{GM(1+e)}{a(1-e)}} = \sqrt{\frac{GM(1+e)}{(R+\frac{h}{2})(1-e)}} \approx 1.7 \cdot 10^3 \text{ м/с}$$