XXVII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

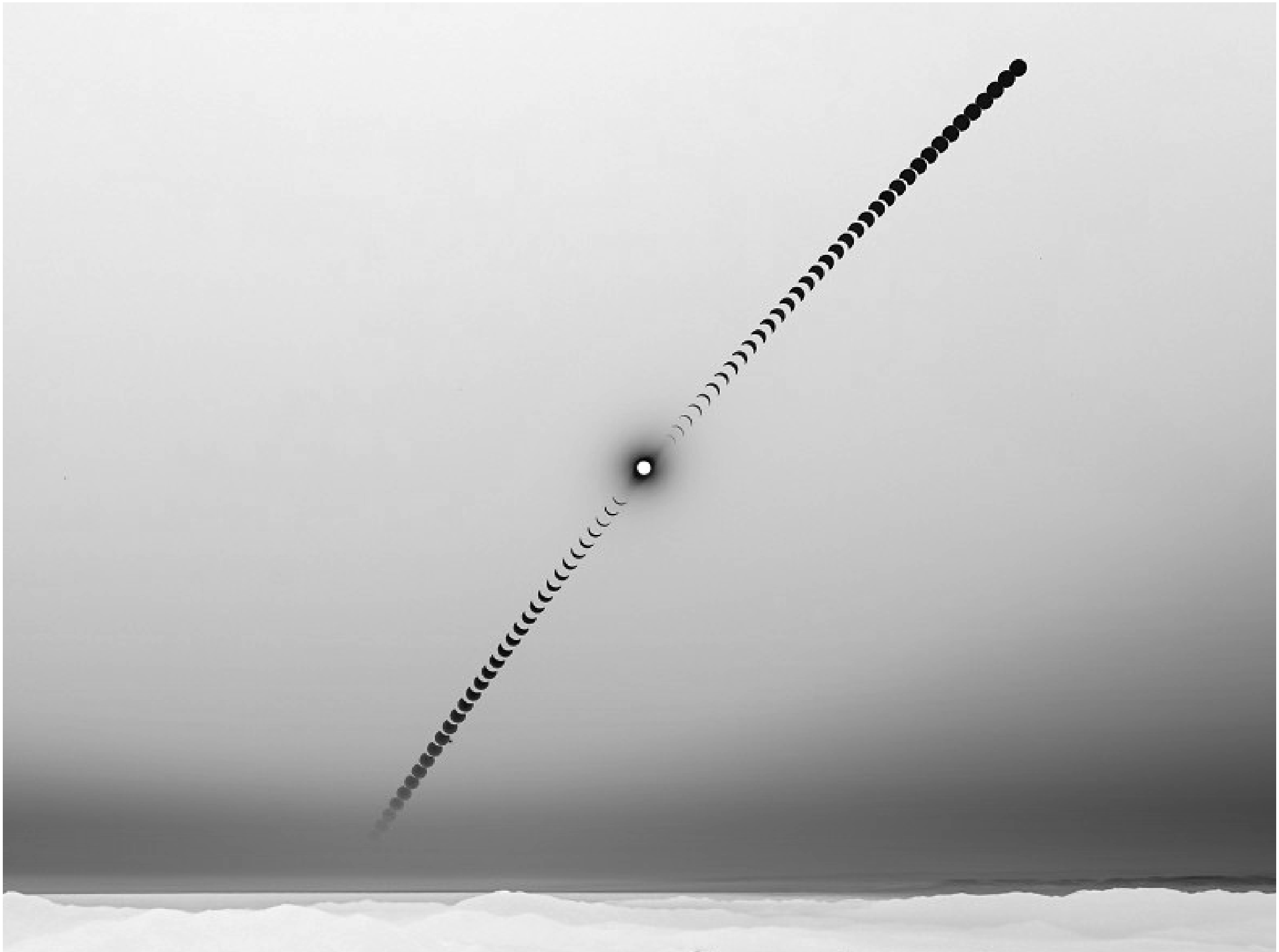
практический тур, решения

2020

1 марта

10 класс

Вам дана серия фотографий полного солнечного затмения, наложенных друг на друга (негативов). Затмение произошло на закате Солнца 2 июля. Максимальная фаза затмения наблюдалась в 20 часов 40 минут по Всемирному времени. На фотографии видна линия горизонта. Определите как можно точнее географические координаты места наблюдения.



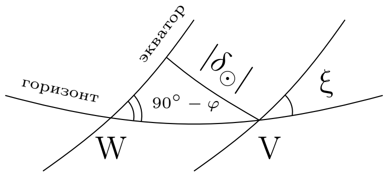
Решение (20 баллов):

Сразу нужно отметить, что фотографии сделаны в южном полушарии, поскольку из условия, что наблюдается закат Солнца, следует, что движение небесной сферы происходит справа налево.

На фотографии хорошо прослеживается часть суточной параллели Солнца, которую оно прошло за время затмения. Очевидно, что для определения широты необходимо измерить угол между горизонтом и касательной к суточной параллели, проведенной через точку их пересечения. Измерения показывают, что этот угол равен около 58°.

Простейший метод определения широты φ состоит в том, чтобы измеренный угол приравнять к $90^\circ - \varphi$, т.е. углу между экватором и горизонтом. Тогда $\varphi = 32^\circ$ южной широты.

Этот метод, очевидно, не очень точен, т.к. в день затмения, 2 июля, Солнце двигалось не по небесному экватору, т.е. большому кругу, а по малому кругу, отстоящему от экватора на угол, по модулю равный склонению Солнца в этот день. Это видно даже по фотографии, поскольку трек Солнца представляет собой не прямую, как было бы в случае движения по большому кругу, а изогнутую линию. Так как дело происходит в южном полушарии, то суточная параллель Солнца располагается под экватором.

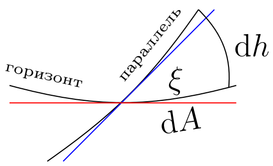


Угол между горизонтом и суточной параллелью ξ Солнца в точке захода V меньше, чем угол между экватором и горизонтом, так что при решении, учитывающем этот факт, итоговая широта получится меньше. Однако интуитивно ясно, что разность приближенного и точного значений широты будет мала, т.к. склонение Солнца $\delta_\odot$ 2 июля практически равно $\varepsilon = 23^\circ.4$ — углу наклона эклиптики к экватору, который достаточно мал, а искомое значение широты около 30°, что также достаточно малый угол. Можно предположить, что разность углов не будет превышать погрешности измерения угла на изображении (которая составляет несколько градусов, поскольку, например, на картинке нет фотографии Солнца прямо в момент захода, что не позволяет достаточно точно провести касательную к суточной траектории Солнца в точке захода).

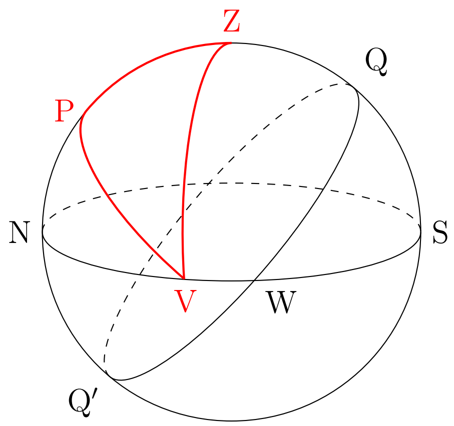
Теперь рассмотрим более точный метод решения этой части задачи. Для этого надо понять, как найти угол между горизонтом и суточной параллелью. Обойтись только стандартными методами решения сферических треугольников в этом случае нельзя, поскольку суточная параллель — малый круг. Сразу сделаем оговорку, что все дальнейшие рисунки и выводы формул мы будем делать для Северного полушария, что привычно для всех участников олимпиады, которые живут в Северном полушарии. Очевидно, что ситуация абсолютно симметрична при одновременной замене φ на $-\varphi$ и $\delta_\odot$ на $-\delta_\odot$. Поэтому все последующие рассуждения приведены для Северного полушария (и, вообще говоря, абсолютных значений широты и склонения).

Склонение Солнца (по модулю) мы знаем, это $\delta_\odot \approx 23^\circ.4$, хотя его можно оценить немного точнее. 2 июля на 11 дней отстоит от летнего солнцестояния. Следовательно, после того как Солнце имело максимальное склонение, оно с хорошей точностью прошло около 11° по эклиптике (точнее считать не имеет смысла, так как нам неизвестно точное время момента летнего солнцестояния). Склонение Солнца в течение года меняется по синусоиде с периодом 1 год и амплитудой $23^\circ.4$. В данном случае, если взять за начало отсчета летнее солнцестояние, склонение можно вычислить по формуле: $\delta_\odot = 23^\circ.4 \cdot \cos(11^\circ)$. Известно, что косинус малого угла, выраженного в радианах, можно представить как $\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$. Тогда $\delta_\odot \approx 23^\circ.4 - 23^\circ.4 \cdot \frac{0.2^2}{2} \approx 23^\circ$.

Рассмотрим окрестности точки пересечения. Нам нужно найти угол ξ между касательной к суточной параллели и касательной к горизонту, которая, по определению, является горизонтальной прямой.



Зависимость высоты от азимута можно получить из т.н. параллактического треугольника (выделен красным).



В этом треугольнике:

$$\mathrm{PZ} = 90^\circ - \varphi;$$

$$\mathrm{PV} = 90^\circ - \delta;$$

$$\mathrm{ZV} = z_\odot = 90^\circ - h;$$

$$\angle\,\mathrm{Z} = 180^\circ - A.$$

$$\angle\,\mathrm{P} = t.$$

Запишем сферическую теорему косинусов для этого треугольника:

$$\cos\left(90^\circ - \delta\right) = \cos\left(90^\circ - h\right) \cdot \cos\left(90^\circ - \varphi\right) + \sin\left(90^\circ - h\right) \cdot \sin\left(90^\circ - \varphi\right) \cdot \cos\left(180^\circ - A\right).$$

Преобразуя, получаем:

$$\cos A = \frac{\sin h \cdot \sin\varphi - \sin\delta}{\cos h \cdot \cos\varphi}.$$

Вычислим дифференциалы обеих частей равенства:

$$-\sin A\,\mathrm{d}A = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\cos^2 h \cdot \sin\varphi + \sin h(\sin h \cdot \sin\varphi - \sin\delta)}{\cos^2 h}\,\mathrm{d}h.$$

Отсюда после преобразований получаем:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}A} = \frac{\sin A \cdot \cos^2 h \cdot \cos\varphi}{\sin h \cdot \sin\delta - \sin\varphi)}.$$

$$\operatorname{tg}\xi = \left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}A}\right|_{h=0} = -\frac{\sin A}{\operatorname{tg}\varphi}$$

Видно, что, для того, чтобы найти φ по значению ξ, надо знать азимут захода. Его можно найти из того же параллактического треугольника, положив в теореме косинусов, записанной выше, $h = 0$:

$$\cos A = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}.$$

Получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными, из которой принципиально возможно найти искомую широту. Сделать это можно, например, следующим образом. Перепишем уравнения, выразив из них синус и косинус азимута

$$\begin{cases} \sin A = -\operatorname{tg}\xi \operatorname{tg}\varphi, \\ \cos A = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}, \end{cases}$$

возведем оба уравнения в квадрат и сложим. Получим

$$\operatorname{tg}^2\xi \operatorname{tg}^2\varphi + \frac{\sin^2\delta}{\cos^2\varphi} = 1.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}^2\xi \sin^2\varphi + \sin^2\delta = \cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$$

и

$$\left(\operatorname{tg}^2\xi + 1\right)\sin^2\varphi + \sin^2\delta = 1,$$

откуда

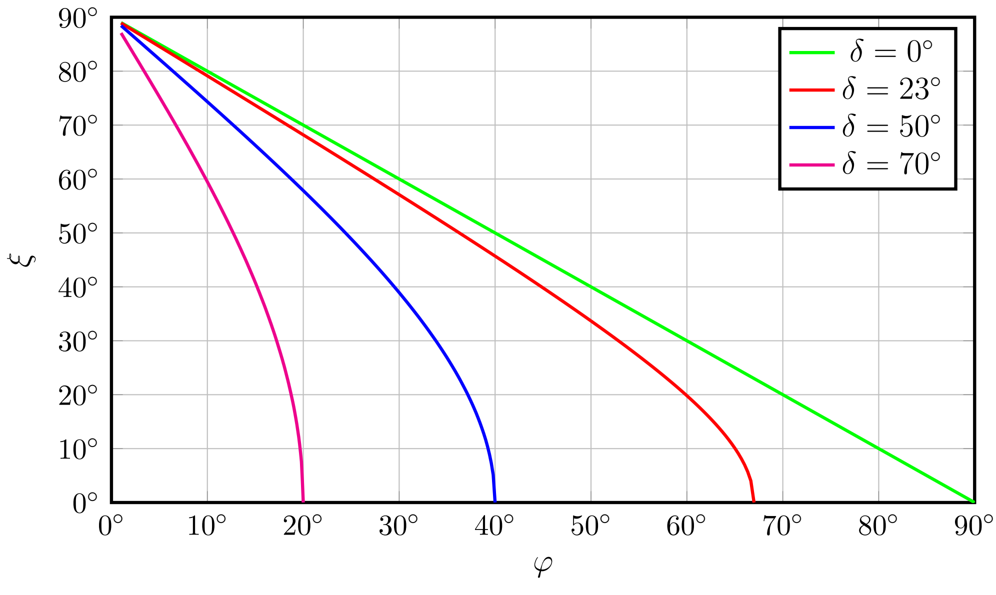
$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{1-\sin^2\delta}{\operatorname{tg}^2\xi + 1}}.$$

Выражение удобнее оставить именно в таком виде, это удобнее для вычислений.

Непосредственно из измерений по рисунку можно получить $\operatorname{tg}\xi$ (сам угол при этом измерять не обязательно), при этом должно получиться 1.6 (естественно, с некоторой погрешностью). Значение $\sin\delta_\odot \approx \sin\varepsilon = \sin 23^\circ.4$ настолько часто встречается в задачах, что может быть просто известно заранее, но его можно оценить, считая угол малым (или даже построив прямоугольный треугольник с углом нужной величины с помощью транспортира и измерив его стороны линейкой). Получится около 0.4 (более точное значение, учитывающее, что затмение происходило не в момент солнцестояния — 0.39). Тогда

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{1-0.39^2}{1.6^2+1}} \approx \sqrt{\frac{1-0.15}{2.6+1}} = \sqrt{\frac{0.85}{3.6}} = \sqrt{0.24}.$$

Можно остановиться на этом, заметив, что $\varphi = 30^\circ$ (не забыв, что на самом деле мы избавились от знака, но речь идет о южном полушарии), но можно и отметить, что реальное значение чуть меньше, т.е. затмение наблюдалось примерно на $29^\circ - 30^\circ$ южной широты (счет с большей точностью явно лишен смысла, поскольку измерять углы с точностью лучше 1° транспортир не позволяет).



Как видим, полученный ответ близок к полученному более простым методом, однако отличается от него примерно на 2°. В принципе можно рассмотреть и общий случай для разных склонений объектов (не обязательно Солнца), результат приведен на графике зависимости ξ от δ и φ. Приблизительная широта нам известна. По графику видно, что для интересующих нас широты и склонения отличие угла ξ от $90° - \varphi$ не превышает 3° (что мы фактически и получили, решая задачу более аккуратно).

Теперь, зная широту, можно определить и долготу. Из условия известно, что максимальная фаза затмения наблюдалась в этом месте в $t_{UT}^{max} = 20^h 40^m$ UT. Это среднее солнечное время гринвичского меридиана в этот момент. Если найти часовой угол Солнца в момент максимальной фазы $t_{\odot}^{max}$, то $t_{\odot}^{max} + 12^h$ это будет местное истинное солнечное время в тот же момент времени. Разность $t_{\odot}^{max} - t_{UT}^{max}$ с точностью до уравнения времени равна долготе места наблюдения. Уравнение времени (среднее-истинное) в этот день меньше +5 минут (точнее, около 3.7 минуты). Его можно учесть (если решающий задачу может получить или вспомнить эту оценку), но сначала надо понять, с какой точностью можно определить часовой угол Солнца в момент максимальной фазы.

Для определения часового угла светила в некоторый момент времени необходимо знать широту места, склонение светила и его высоту над горизонтом в данный момент. Первые две величины уже известны, осталось найти высоту.

Можно пойти двумя путями. Первый состоит в том, чтобы измерить высоту Солнца в момент максимальной фазы по рисунку, используя в качестве масштаба четкие изображения Солнца, а затем с помощью формулы косинусов найти связь между высотой и часовым углом из параллактического треугольника:

$$\sin h^{max} = \sin\varphi \cdot \sin\delta_{\odot} + \cos\varphi \cdot \cos\delta_{\odot} \cdot \cos t_{\odot}^{max}$$

Второй путь, пожалуй, несколько проще вычислительно. Можно измерить длину той части суточной параллели Солнца, которую ему осталось пройти до захода, перевести ее в единицы времени и вычесть из часового угла захода, который находится по более простой формуле (получающейся подстановкой $h = 0$ в предыдущую):

$$\cos t_{\odot}^{0} = -\operatorname{tg}\delta_{\odot} \cdot \operatorname{tg}\varphi.$$

При вычислении разности во времени между моментами максимальной фазы и захода необходимо учесть, что суточная параллель в $\cos\delta_{\odot}$ раз меньше, чем экватор, и Солнце проходит ее со скоростью не 15°/час, а $15° \cdot \cos\delta_{\odot}$/час. Соответствующие измерения и вычисления показывают, что максимальная фаза наблюдалась за 1.3 часа до захода. Большей точности при имеющихся измерительных возможностях и вычислениях без калькулятора явно не добиться, так что учет уравнения времени лишен смысла.

$$\cos t_{\odot}^{0} = -\operatorname{tg}\delta_{\odot} \cdot \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}23° \cdot \operatorname{tg}30° \approx \frac{0.4}{1.7} \approx 0.24$$

Так как $\sin(\pi/2 - t_{\odot}^{0}) \approx \pi/2 - t_{\odot}^{0} \approx 0.24$, то $t_{\odot}^{0} \approx 76° \approx 5$ часов, т.е. в 17 часов истинного местного солнечного времени Солнце зайдет, а за 1.3 часа до этого, т.е. примерно в $15^h 40^m$ была максимальная фаза затмения. Отсюда получаем, что долгота места равна примерно -5^h или 75° западной долготы

На самом деле фотографии были сделаны в высокогорной обсерватории Ла-Силья в чилийской пустыне Атакама. Точные координаты обсерватории: 29°15′ ю.ш., 70°44′ з.д. Ла-Силья находилась немного севернее середины полосы затмения, поэтому ясное небо немного ярче на севере (справа на картинке). Оригинальная фотография размещена ниже.