

9 класс

Серия снимков Земли на следующей странице была сделана космическим аппаратом, движущимся по круговой орбите вокруг Луны. Оцените, на какой высоте над поверхностью Луны летел аппарат, если известно, что интервал времени между соседними снимками равняется 8 секундам. Можно считать, что масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, а диаметр — в 4 раза меньше диаметра Земли.

Решение (20 баллов):

Сразу заметим, что серия снимков — реальна, и была сделана астронавтами, облетавшими Луну 24 декабря 1968 года на «Аполлоне-8».

На серии снимков видна поднимающаяся из-за горизонта Луны Земля. По условию, интервал времени между соседними снимками равняется 8 с, поэтому время, прошедшее между первым и последним снимками, равно $5 \cdot 8 = 40$ с. Если внимательно присмотреться к первому снимку, то можно увидеть, что в тот момент, когда он был сделан, из-за горизонта показался край земного диска. Если же на последнем снимке достроить изображение Земли до полного диска, то окажется, что в тот момент, когда был сделан последний снимок, Земля уже полностью показалась над лунным горизонтом и даже оказалась чуть-чуть выше его. Следовательно, 40 с — это время полного восхода Земли для наблюдателей с космического корабля. Определять время восхода с большей точностью бессмысленно ввиду неопределенности моментов начала и конца восхода. По серии рисунков также видно, что Земля восходит не совсем вертикально, но отклонение траектории ее восхода от вертикального направления очень мало, так что в оценочной задаче им можно пренебречь.

Луна все время повернута к Земле одной стороной, если не считать либраций. Однако период либраций равен периоду обращения Луны вокруг Земли и тем самым намного больше, чем 40 с. Отсюда очевидно, что эффект восхода Земли обеспечивается исключительно движением корабля.

Так как диаметр Земли в 4 раза больше лунного, то ее угловой диаметр на небе Луны также в 4 раза больше углового диаметра лунного диска на земном небе и равен 2° . Тем самым угловая скорость аппарата равна 2° за 40 с, или $180^\circ/\text{час}$, т.е. период обращения равен $P = 2$ часам.

Дальше задача заключается в том, чтобы найти высоту h орбиты спутника Луны с периодом 2 часа. Это можно делать разными способами. Самый прямой — это воспользоваться третьим законом Кеплера:

$$\frac{(R_\zeta + h)^3}{P^2} = \frac{GM_\zeta}{4\pi^2}$$

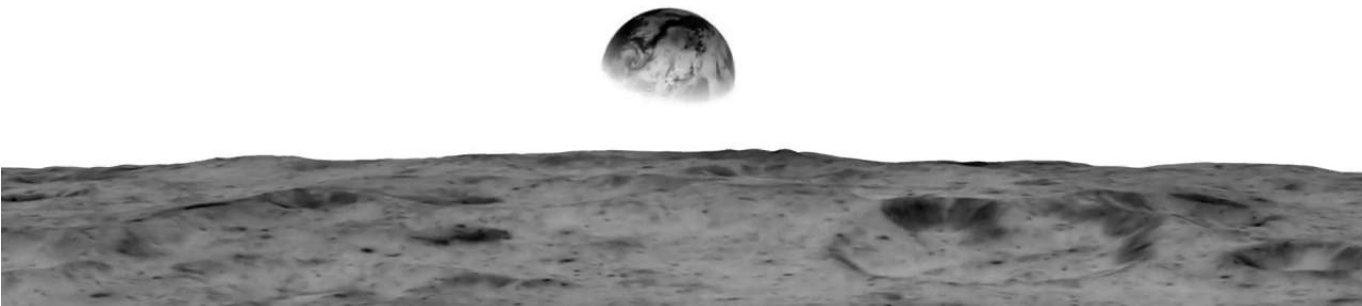
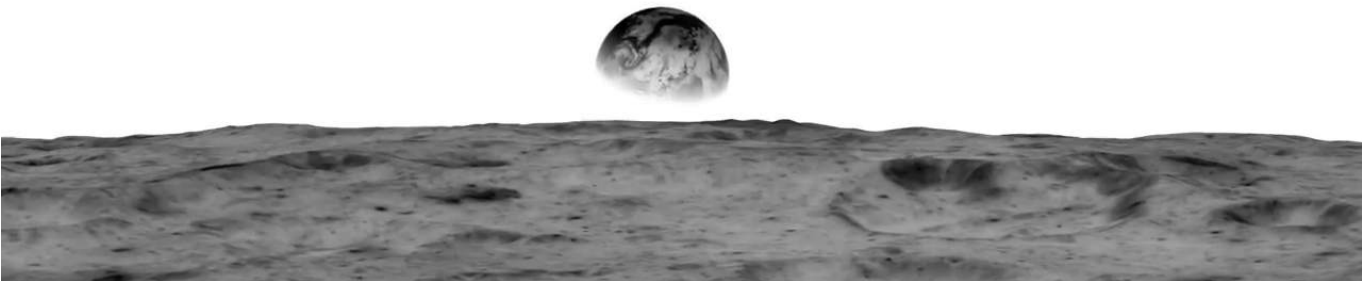
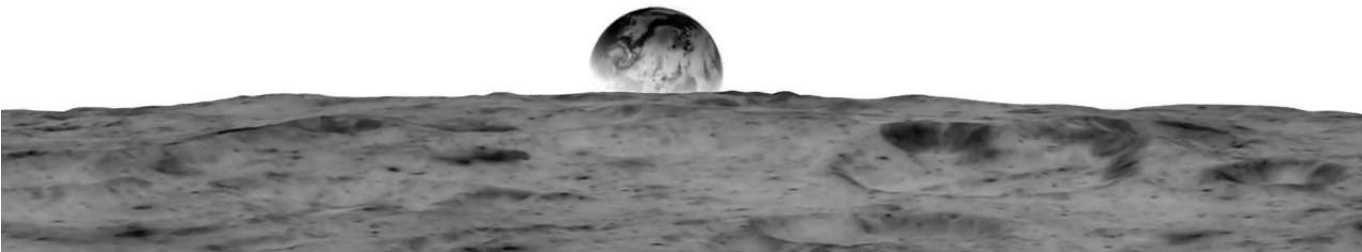
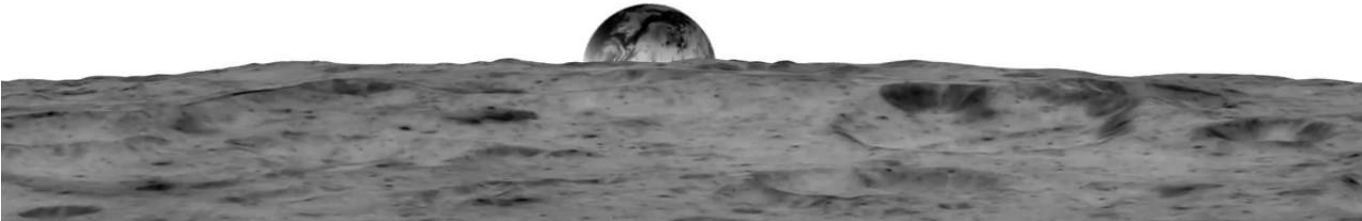
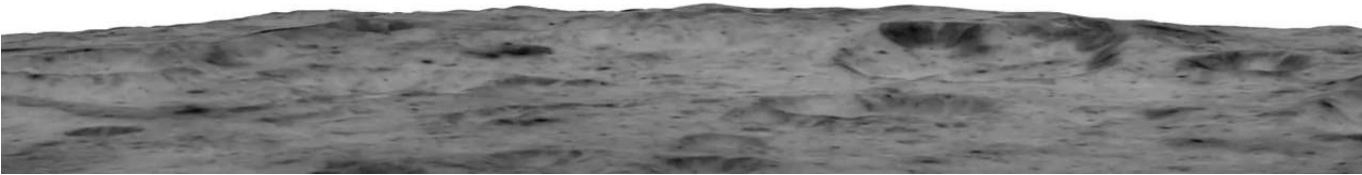
Отсюда

$$(R_\zeta + h)^3 = \frac{GM_\zeta P^2}{4\pi^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (2 \cdot 3600)^2}{4\pi^2 \cdot 81} \approx 4^3 \cdot 10^{17}$$

$$R_\zeta + h = \sqrt[3]{4^3 \cdot 10^{17}} = 4\sqrt[3]{100} \cdot 10^5 \text{ м} \approx 1800 \text{ км.}$$

Следовательно, т.к. $R_\zeta = R_\oplus/4 = 6400/4 = 1600$ км, то $h \approx 200$ км.

Второй способ: через круговую скорость. Круговая скорость для орбиты высотой h



$$v^2 = \frac{GM_{\zeta}}{R_{\zeta} + h}$$

Тогда отношение первой космической скорости (т.е. скорости на стелющейся круговой орбите) к скорости на орбите с высотой h равно

$$\left(\frac{v_{I\zeta}}{v}\right)^2 = \frac{R_{\zeta} + h}{R_{\zeta}}$$

С другой стороны

$$v = \frac{2\pi(R_{\zeta} + h)}{P},$$

тогда

$$v_{I\zeta}^2 = v^2 \frac{R_{\zeta} + h}{R_{\zeta}} = \frac{[2\pi(R_{\zeta} + h)]^2 (R_{\zeta} + h)}{R_{\zeta} P^2} = \frac{4\pi^2 R_{\zeta}^2}{P^2} \left(1 + \frac{h}{R}\right)^3$$

Первую космическую скорость для Луны можно найти по сравнению с первой космической скоростью для Земли:

$$\left(\frac{v_{I\zeta}}{v_{I\oplus}}\right)^2 = \frac{M_{\zeta}}{M_{\oplus}} \frac{R_{\oplus}}{R_{\zeta}} = \frac{4}{81},$$

тогда

$$\left(1 + \frac{h}{R}\right)^3 = \frac{4v_{I\oplus}^2 P^2}{81\pi^2 R_{\zeta}^2} = \frac{8^2 \cdot 2^2 \cdot 3600^2}{9^2 \cdot \pi^2 \cdot 1600^2} \approx \frac{8}{5} = 1.6.$$

Далее можно либо приближенно вычислить $\sqrt[3]{1.6} \approx 1.17$, получив отсюда, что $h = 0.17 \cdot 1600 \approx 270$ км, либо воспользоваться фактом, что h/R_{ζ} малая величина и, следовательно,

$$\left(1 + \frac{h}{R}\right)^3 = 1 + 3\frac{h}{R} + 3\left(\frac{h}{R}\right)^2 + \left(\frac{h}{R}\right)^3 \approx 1 + 3\frac{h}{R}.$$

Тогда

$$1 + 3\frac{h}{R} \approx \frac{8}{5} \implies \frac{h}{R} \approx \frac{1}{5},$$

следовательно $h \approx 300$ км.

Следует заметить, что мы получили завышенное значение высоты, т.к. реальный радиус Луны чуть больше значения, которое мы использовали, и равен 1734 км. Если иметь это в виду, то высота получится меньше и будет равна около 120 км, что соответствует реальной высоте, на которой летал «Аполлон-8».

Критерии определения победителей и призеров Санкт-Петербургской астрономической олимпиады

1. **Победителями** олимпиады в каждой возрастной параллели признаются участники, набравшие максимальное число баллов по итогам заключительного этапа (теоретического и практического туров), а также следующие за ними участники, набравшие не менее $2/3$ от максимально возможного количества баллов, с учетом особенностей распределения баллов в каждой возрастной параллели. Общее количество победителей по всем возрастным параллелям не может превышать 8% от числа участников заключительного этапа.
2. **Призерами** олимпиады в каждой возрастной параллели признаются участники, следующие за победителями по списку, набравшие не менее $1/3$ от максимально возможного количества баллов, с учетом особенностей распределения баллов в каждой возрастной параллели. Общее количество победителей и призеров по всем возрастным параллелям не может превышать 25% от числа участников заключительного этапа.
3. Среди призеров дипломами призеров **II степени** награждаются участники, вошедшие в число призеров и набравшие не менее $1/2$ от максимально возможного количества баллов, с учетом особенностей распределения баллов в каждой возрастной параллели. Суммарное количество призеров **II степени** должно составлять не более половины от общего числа призеров.
4. Остальные участники, вошедшие в число призеров, награждаются дипломами призеров **III степени**.

Председатель жюри олимпиады,
к.ф.-м.н., доцент каф. астрофизики
математико-механического ф-та СПбГУ



П.А.Тараканов

24.01.2019