

XXVI Санкт-Петербургская
астрономическая олимпиада
теоретический тур, решения

2019
3
февраля

7–8 классы

1. В середине ноября радиант метеорного потока находился выше всего над горизонтом в предрассветные часы. Какой это мог быть поток — Леониды или Эта-Аквариды? Почему?

Решение (8 баллов):

Радиант потока Леониды находится в созвездии Льва, а потока Эта-Аквариды — в созвездии Водолея. В середине ноября Солнце находится в созвездии Весов. Созвездие Льва восходит раньше, созвездие Водолея — позже. Значит, перед рассветом можно было наблюдать Леониды.

2. Правитель маленького, но гордого королевства, не разобравшись с устройством современного календаря, повелел с 1 января 2019 года жить по календарю, в котором год длится ровно 360 дней. В каком году по принятому в России календарю 1 января снова совпадет с 1 января по королевскому календарю?

Решение (8 баллов):

Начнем с приближенной оценки. В принятом в России григорианском календаре год практически до конца этого века продолжается в среднем на $5\frac{1}{4}$ суток больше, чем в календаре королевства. Ситуация немного поменяется в 2100 году — он в григорианском календаре високосным не является. Однако $365.25/5.25 \approx 69.6$, и это означает, что «королевский» счет лет обгонит общепринятый на целый год где-то примерно в $2019 + 70 = 2089$ году.

Казалось бы, это и есть итоговый ответ (который, возможно, стоит лишь немного уточнить), но на самом деле это не так. Нам нужно добиться не только обгона на год, но и совпадения дат 1 января в двух календарях, а это условие при накоплении разницы в год совсем не обязательно окажется выполненным. В самом деле, из условия задачи следует, что 1 января 2020 года по «королевскому» календарю наступит раньше на 5 дней. Следующий сдвиг составит уже 6 дней (2020 год — високосный), после чего еще два раза будет происходить сдвиг на 5 дней, а затем ситуация начнет повторяться. Таким образом, за каждые 4 года будет накапливаться сдвиг на 21 день. За $17 = 68$ лет (к 2087 году) накопится разница в $17 = 357$ дней (и «королевский» календарь будет отставать от григорианского на 8 дней), поэтому в 2088 году она составит 362 дня, а в 2089 — уже 368 дней, т.е. на 2 дня больше, чем нужно.

Таким образом, за 70 лет календари почти сойдутся, но «королевский» будет опережать григорианский на 2 дня, а в 2090 году опережение составит уже 7 дней. Если после этого снова отсчитать 68-летний цикл, то отставание, казалось бы, должно составлять 1 день, но за это время успеет случиться 2100 год, который не является високосным в григорианском календаре, поэтому отставание составит 2 дня (и произойдет это в 2158 году). Следующий 68-летний цикл добавит еще 9 суток отставания (8 из-за цикла и 1 — из-за невисокосного в григорианском календаре 2200 года), и в 2226 году «королевский» календарь будет отставать в сумме на 11 суток. Однако годом раньше отставание составит 6 суток ($11 - 5$), а еще годом раньше будет високосный 2224 год, который как раз и обеспечивает отставание на 6 суток. Итого в 2225 году начала года совпадут, это и будет ответом.

3. Два астронома в Петербурге и в некоторой обсерватории наблюдают Вега. Высота верхней кульминации звезды в двух пунктах отличается на 3° , при этом в обсерватории Вега поднимается на бóльшую высоту к югу от зенита. Известно, что в обсерватории Вега достигает наибольшей высоты над горизонтом на 1 час 58 минут раньше, чем в Петербурге. Определите координаты обсерватории и оцените расстояние между Петербургом и обсерваторией.

Решение (8 баллов):

Первое, что нужно сделать — вспомнить координаты Петербурга: 60° северной широты и 30° восточной долготы. Теперь получим координаты обсерватории.

В обсерватории, по условию, верхняя кульминация происходит к югу от зенита. Этому условию в северном полушарии удовлетворяют звезды, склонение которых не превосходит широты места наблюдения, тогда $90^\circ - \varphi + \delta \leq 90^\circ$. Склонение Веги меньше 60° , поэтому и в Петербурге звезда кульминирует к югу от зенита. Запишем соотношения для верхних кульминаций:

$$h_{\text{ВК, СПб}} = 90^\circ - \varphi_{\text{СПб}} + \delta, \quad h_{\text{ВК, К}} = 90^\circ - \varphi_{\text{К}} + \delta.$$

Разность высот кульминаций соответствует разности широт пунктов наблюдения:

$$h_{\text{ВК, К}} - h_{\text{ВК, СПб}} = \varphi_{\text{СПб}} - \varphi_{\text{К}} = 3^\circ \implies \varphi_{\text{К}} = \varphi_{\text{СПб}} - 3^\circ = 60^\circ - 3^\circ = 57^\circ.$$

Тот же вывод можно получить, если вспомнить утверждение о том, что высота полюса мира над горизонтом равна широте места наблюдения. Поскольку все звездное небо при смене широты места наблюдения «поворачивается» как целое, разница в высотах кульминаций должна соответствовать разнице широт. Поскольку Вега находится достаточно далеко от полюса мира, она должна подниматься на большую высоту в более южных широтах, и это означает, что широта обсерватории составляет 57° северной широты.

Разность долгот соответствует разности времени наблюдения. В часовой мере разность долгот равна $1^{\text{h}}58^{\text{m}}$, что в градусной мере равно $\frac{1^{\text{h}}58^{\text{m}}}{24^{\text{h}}} \cdot 360^\circ = 29.5^\circ$. Так как в обсерватории наблюдения проводятся раньше, то ее долгота больше долготы Петербурга и составляет $30^\circ + 29.5^\circ = 59.5^\circ$.

Теперь определим расстояние между пунктами наблюдения. По широте угловое расстояние составляет 3° , по долготе — 29.5° , почти в 10 раз больше. Для оценки можно считать, что расстояние определяется разностью долгот. Поскольку широты пунктов приблизительно равны 60° , то длина географической параллели составляет половину длины экватора, то есть $2 \cdot 10^4$ км. Тогда расстояние вдоль параллели между пунктами равно $29.5 : 360 \cdot 2 \cdot 10^4 \approx 1640$ км.

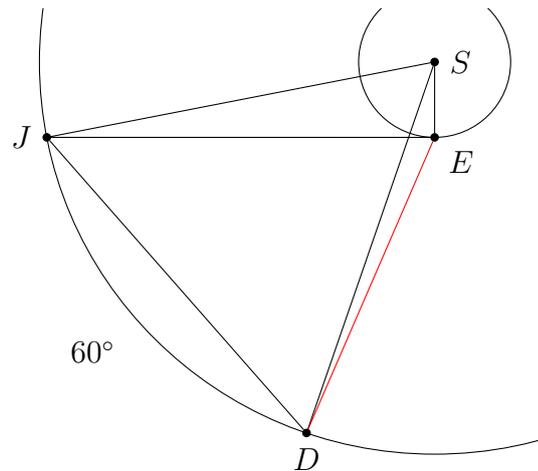
Наконец, отметим, что указанная в условии обсерватория действительно существует — это Коуровская обсерватория на Урале.

4. Во время радиолокации астероида Диомед Юпитер находился в восточной квадратуре. Сколько времени длился единичный сеанс радиолокации? Известно, что Диомед движется вокруг Солнца по той же орбите, что и Юпитер, но обгоняет его на $1/6$ периода.

Решение (8 баллов):

Астероид Диомед является представителем так называемых «троянских» астероидов, которые находятся в точках Лагранжа L_4 и L_5 . Конкретно Диомед расположен в L_4 , и именно поэтому он опережает Юпитер на 60° по орбите. Теперь необходимо нарисовать правильную схему расположения небесных тел: угол Солнце S – Земля E – Юпитер J составляет 90° ; дуга J – астероид D составляет 60° ; и наша задача — найти расстояние ED и перевести его во время путешествия радиосигнала. Заметим, что треугольник SJD таким образом получится равнобедренным (две вершины равноудалены от третьей, а угол

между ними равен 60°). В рамках данного решения мы будем использовать значение радиуса орбиты Юпитера, равное 5.2 а.е., но участникам не возбраняется использовать приближенное значение 5 а.е. Также будем считать, что все объекты находятся в плоскости эклиптики и движутся по круговым траекториям.



Если аккуратно нарисовать положение небесных тел в масштабе, то искомое расстояние можно измерить линейкой, и это будет верным ответом. Тем не менее, приведем аналитическое решение задачи.

Можно вычислить угол $\angle EJD = 60^\circ - \arcsin 1/5.2 \approx 48^\circ$, а затем применить теорему косинусов к треугольнику EJD , из которой найти необходимую сторону ED . Однако ее можно найти и не зная тригонометрии.

Заметим, что площадь треугольника SED и двух составляющих его треугольников невелика, и поэтому можно сказать, что

$$S_{EJD} \approx S_{SJD} - S_{SJE}.$$

Также заметим, что высоты, опущенные из угла J на основания SD и ED почти что равны в треугольниках SJD и EJD соответственно. Площадь прямоугольного треугольника SJE можно вычислить как $S_{SJE} = \frac{1}{2} \cdot 5.1 \cdot 1$ (сторона JE вычисляется по теореме Пифагора, все стороны подставляем в а.е.). Высота в равностороннем треугольнике SJD вычисляется как $5.2\sqrt{3}/2$, а его площадь $S_{SJD} = 5.2^2\sqrt{3}/4$.

Запишем соотношение площадей, но уже в числах:

$$\frac{1}{2} \cdot ED \cdot \frac{5.2\sqrt{3}}{2} \approx \frac{5.2^2\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \cdot 5.2 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad ED = 5.2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 4 \text{ а.е.}$$

Итак, тем или иным способом мы нашли, что радиосигналу требуется пройти 4 а.е. до астероида и столько же обратно. Т.к. на прохождение 1 а.е. свету требуется 8 минут, то на весь путь свет затратит 64 минуты.

5. 27 июля 2018 года произошло уникальное астрономическое событие: великое противостояние Марса произошло одновременно с полным центральным затмением Луны. При этом во время максимальной фазы затмения Марс был на 2 звездных величины ярче Луны. Оцените, во сколько раз одна квадратная секунда видимого диска Марса была ярче одной квадратной секунды диска Луны. Известно, что разница на одну звездную величину означает, что объект ярче в ≈ 2.5 раза. Радиус Марса в два раза меньше радиуса Земли, радиус орбиты Марса составляет 1.5 а.е.

Решение (8 баллов):

Из условия следует, что весь Марс был ярче всей Луны в $2.5^2 \approx 6.3$ раза. Для того, чтобы выяснить, как соотносились яркости с одной квадратной секунды (такую величину принято называть «поверхностной яркостью»), нам надо найти отношение видимых размеров дисков Марса и Луны.

Поскольку радиус Луны примерно в 4 раза меньше радиуса Земли, то радиус Марса примерно в 2 раза больше радиуса Луны. Зная или вычисляя расстояние до Луны от Земли в астрономических единицах ($\approx 1/400$ а.е.), делаем вывод, что в описанной ситуации Марс будет примерно в 200 раз дальше от Земли, чем Луна (на самом деле это завышенная оценка — орбита Марса не является окружностью, однако, поскольку в условии дан радиус орбиты, этим можно пренебречь). Следовательно, угловой диаметр Марса на небе будет в 100 раз меньше углового диаметра Луны, а угловая площадь — в $100^2 = 10^4$ раз меньше. Следовательно, каждая квадратная секунда видимого диска Марса была ярче квадратной секунды диска Луны в $\approx 6 \cdot 10^4$ раз.

Возможно, кто-либо из участников сразу вспомнит угловой размер диска Марса во время великого противостояния. Это позволяет получить более точную оценку. Марс при этом будет ближе к Земле, как следствие, будет иметь большие угловые размеры, а это приведет к тому, что ответ уменьшится примерно в полтора-два раза.