XXVI Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

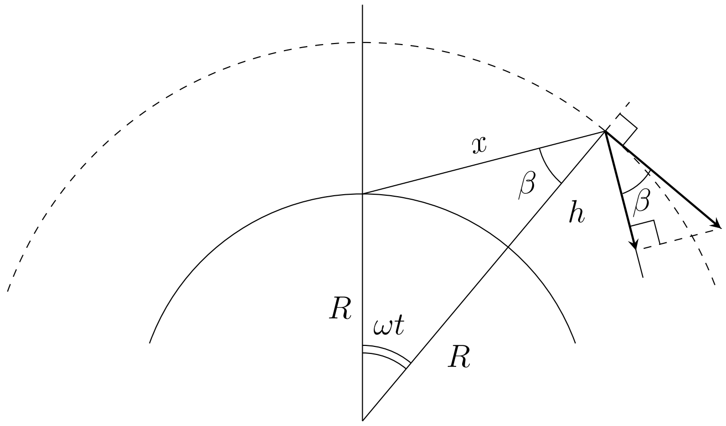
2019

3 февраля

11 класс

1. ИСЗ движется по круговой орбите с высотой 200 км и пролетает через зенит. Найдите время, в течение которого его наблюдаемая угловая скорость будет больше половины максимальной.

Решение (8 баллов):



Пусть спутник пролетает через зенит в момент $t = 0$. Если угловая скорость спутника относительно центра Земли ω, то угол при центре Земли в треугольнике наблюдатель–центр Земли–спутник в некоторый момент t будет равен ωt. Тогда угол β при спутнике можно получить из теоремы синусов

$$\frac{\sin\beta}{R} = \frac{\sin\omega t}{x},$$

где R — радиус Земли, $x = \sqrt{R^2 + (R+h)^2 - 2R(R+h)\cos\omega t}$ — расстояние от наблюдателя до спутника (вычисляемое из теоремы косинусов), а h — высота полета спутника.

Наблюдаемая угловая скорость спутника Ω будет отношением тангенциальной скорости $\omega R\cos\beta$ и расстояния до него x:

$$\Omega = \frac{\omega R\sqrt{1 - \frac{R^2\sin^2\omega t}{x^2}}}{x}.$$

Несложно заметить, что максимальное значение Ω будет достигаться в тот момент, когда спутник в зените, причем $\Omega_{\max} = \omega R/h$ (что можно получить как из общих соображений, так и подставив $t = 0$ и $x = h$ в уже полученное выражение), а по мере приближения спутника к горизонту наблюдаемая угловая скорость будет убывать. Поэтому нам надо найти $t = \tau$ такое, что $\Omega(\tau) = \Omega_{\max}/2$.

Тогда

$$\frac{\omega R}{h} = 2\,\frac{\omega R\sqrt{1 - \frac{R^2\sin^2\omega\tau}{x^2}}}{x},$$

откуда

$$\frac{x^2}{4h^2} = 1 - \frac{R^2\,\sin^2\omega\tau}{x^2}$$

или

$$\frac{R^2 + (R+h)^2 - 2R(R+h)\cos\omega\tau}{4h^2} = 1 - \frac{R^2\,\sin^2\omega\tau}{R^2 + (R+h)^2 - 2R(R+h)\cos\omega\tau}.$$

Формально осталось всего лишь решить получившееся уравнение относительно τ, но подобная перспектива без использования вычислительной техники выглядит не очень привлекательно, поэтому надо придумать способ упростить вычисления.

Все, кто видел спутники на ночном небе (а видны в основном низкоорбитальные спутники), знают, что время их пролета по видимой половине небесной сферы — минуты (притом минимальный период обращения спутника вокруг Земли составляет около полутора часов). Конечно, тот же результат можно получить и аккуратно — окажется, что наш спутник будет находиться над горизонтом около 6 минут — но в данном случае это излишне. Интересующий нас интервал времени, очевидно, меньше еще как минимум в два раза, а это означает, что величина $\omega\tau$ в любом случае мала. Тогда в качестве приближения можно считать, что $\sin\omega\tau \approx \omega\tau$, а $\cos\omega\tau \approx 1$. Учитывая это, получим

$$\frac{1}{4} = 1 - \frac{R^2\,(\omega\tau)^2}{h^2},$$

откуда

$$\tau = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{h}{\omega R}.$$

Если учесть, что $\omega R \approx 8$ км/с (спутник низкоорбитальный, так что это с достаточной точностью просто первая космическая скорость на поверхности Земли), получаем, что $\tau \approx 22$ секунды, а интересующий нас полный интервал времени составляет 44 секунды (или, что правильнее в данном случае, $4 \cdot 10^1$ секунды).

В этот момент можно заметить, что мы фактически свели задачу к куда более простой: есть бесконечная плоская Земля, над наблюдателем пролетает спутник с некоторой угловой скоростью… Решение такой задачи в конечном счете даст уже полученное приближение и приведет к тому же ответу, однако в этом случае выбор приближения необходимо заранее обосновывать. В дополнение заметим, что честное решение уравнения для настоящей шарообразной Земли даст результат, равный 49 секундам, так что сделанное приближение оказалось не таким уж и плохим.

2. Работавший в Париже «ловец комет» Шарль Мессье составил свой знаменитый каталог туманных объектов в конце XVIII века по данным наблюдений на нескольких телескопах, в среднем соответствующих рефрактору с диаметром входного отверстия 6 см, находящемуся в идеальных условиях. В каталог, в частности, вошли 28 спиральных галактик. Оцените полное число спиральных галактик, в которых при использовании современных оптических телескопов принципиально возможно наблюдать отдельные звезды (без учета вспыхивающих).

Решение (8 баллов):

Проницающая способность телескопа, в который смотрят глазом, при идеальных условиях, идеальном зрении, использовании равнозрачкового увеличения и т.п. составляет $m_{\mathrm{M}} = 6^m + 5\lg\frac{D}{d}$, где D — диаметр входного отверстия телескопа, а d — диаметр зрачка. Полагая последний $d \approx 6$ мм, получим, что $m_{\mathrm{M}} = 11^m$ (в реальности получалось несколько более 10^m — Париж в XVIII веке уже не был идеальным местом для наблюдений).

Выберем в качестве удобного объекта для сравнения Туманность Андромеды (она же M31). Она имеет интегральную видимую звездную величину 4^m и находится на расстоянии 1 Мпк (мы округлили оба значения вверх для удобства вычислений). Если считать, что все спиральные галактики похожи на M31, получается, что Мессье мог увидеть объекты на 7^m слабее (т.е. освещенность от которых была в $\approx 2.5^7$ раз меньше). Однако освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния, поэтому «дальнобойность» наблюдений Мессье должна была составлять $2.5^{3.5} \approx 25$ Мпк.

Теперь займемся современностью. Сейчас в крупные оптические телескопы глазом никто не смотрит, однако известно, что их предельная проницающая способность составляет около $+30^m$ (у HST при длительной экспозиции даже чуть больше). Самые яркие звезды имеют в оптическом диапазоне абсолютную звездную величину $M = -5^m$, поэтому предельное расстояние, на котором их можно увидеть (без учета поглощения света в межзвездной среде обеих галактик, сложностей с выделением объектов и т.п.) можно получить из известного выражения $M = m - 5\lg r + 5$. Получаем $r = 10^8$ пк, т.е. 100 Мпк. Таким образом, расстояние оказывается в 4 раза больше, чем доступное Мессье, и это означает, что галактик, в предположении их примерно равномерного распределения в пространстве, должно быть в $4^3 = 64$ раза больше, т.е. всего около $28 \times 64 \approx 2 \cdot 10^3$.

Следует также отметить, что для наблюдения отдельных звезд совершенно недостаточно видеть галактику как протяженный объект, поэтому определение предельного расстояния по этому критерию даст сильно завышенный результат. В качестве очевидного в буквальном смысле слова контрпримера все желающие могут посмотреть ночью без телескопа на Туманность Андромеды или (при проживании в подходящих областях Земли) на Магеллановы Облака и попытаться увидеть отдельные звезды в этих несомненно протяженных даже для невооруженного глаза объектах. Можно также заметить, что угловой диаметр Туманности Андромеды составляет около $3°$, так что аналогичные галактики, находящиеся на расстояниях до 100 Мпк, будут иметь угловые размеры $\gtrsim 1'$ (превышающие предельное угловое разрешение человеческого глаза), что не поможет не только увидеть в них глазом отдельные звезды, но — в большинстве случаев — даже увидеть галактики целиком.

3. Американский спутник Vanguard-1 является четвертым искусственным спутником Земли. Он представляет собой алюминиевую сферу диаметром 16 см с шестью длинными тонкими антеннами. Спутник был запущен 17 марта 1958 года на орбиту, период обращения для которой составляет 134 минуты, эксцентриситет орбиты $e = 0.184$, наклон $i = 34°.2$. Когда проще увидеть спутник при наблюдении из Петербурга: в апогее или перигее? Альбедо алюминия считать равным единице.

Решение (8 баллов):

Сперва найдем большую полуось орбиты спутника из III закона Кеплера (сравним, для простоты, с геостационарным спутником Земли ($T_0 = 24$ часа), радиус орбиты которого равен $a_0 = 42$ тыс. км):

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus} = \frac{T_0^2}{a_0^3} \Rightarrow a = a_0\sqrt[3]{\frac{T^2}{T_0^2}} = 42 \times 10^3 \text{ км}\sqrt[3]{\left(\frac{134/60}{24}\right)^2} \approx 42 \times 10^3 \text{ км}(0.45)^2 \approx 8600 \text{ км}.$$

Спутник обращается с 1958 года, значит, был такой момент, когда линия апсид его орбиты лежала в плоскости меридиана Санкт-Петербурга. Тогда угол между Санкт-Петербургом и осью апсид при наблюдении из центра Земли равен $\gamma = \varphi - i = 60° - 34.2° \approx 26°$. Рассчитаем, на каком расстоянии должен находиться спутник, чтобы он был виден на горизонте:

$$r_{max} = \frac{R_\oplus}{\cos\gamma} = \frac{6400 \text{ км}}{\cos 26°} = \frac{6400 \text{ км}}{\cos 30° \cos 4° + \sin 30° \sin 4°} \approx \frac{6400 \text{ км}}{\cos 30° + \sin 30° \cdot \frac{4°}{57.3°}} =$$

$$= \frac{12800 \text{ км}}{\sqrt{3} + 1/15} \approx \frac{12800 \text{ км}}{1.8} = 7100 \text{ км}.$$

Апоцентрическое расстояние составит $r_\alpha = a(1+e) \approx 10$ тыс. км, а перицентрическое $r_\pi = a(1-e) \approx 7$ тыс. км. Отсюда следует, что в перицентре орбиты спутник наблюдать просто невозможно, поэтому условия освещения спутника роли не играют. В итоге проще увидеть спутник, когда он в апогее орбиты (причем он будет достаточно высоко над горизонтом).

4. Известно, что концентрация фотонов, испущенных абсолютно черным телом, непосредственно около этого тела может быть вычислена как $n \approx 20\,T^3$ (где температура дана в кельвинах, а концентрация выражена в см$^{-3}$). Оцените суммарное количество фотонов, находящихся в данный момент внутри Галактики.

Решение (8 баллов):

Первое, что хочется сделать при решении задачи — сосчитать фотоны, которые испускаются звездами (поскольку это самые яркие источники излучения внутри Галактики). Средняя звезда Галактики — это красный карлик с массой около половины солнечной, однако присутствующие в сравнительно небольшом количестве яркие звезды производят каждая существенно больше фотонов.

Поэтому для оценки будем считать, что в Галактике 10^{11} звезд, имеющих эффективную температуру 10^4 K (горячее Солнца) и радиус 10^{-2} а.е. каждая (больше Солнца). Практически все звезды либо холоднее, либо меньше (а для подавляющего большинства верно и то, и другое), так что тем самым мы завысим итоговую оценку.

1 а.е. — это $1.5 \cdot 10^{13}$ см, поэтому площадь поверхности каждой такой такой звезды составит $4\pi R^2 = 4 \cdot 3 \cdot 1.5^2 \cdot 10^{22} = 3 \cdot 10^{23}$ см^2, а в слое толщиной 1 см около каждой такой звезды будет иметься $3 \cdot 10^{23} \cdot 20 \cdot 10^{12} = 6 \cdot 10^{36}$ фотонов. Поскольку они постоянно разлетаются со скоростью света, за 1 секунду их должно образовываться в $3 \cdot 10^{10}$ раз больше, т.е. $2 \cdot 10^{47}$. Таким образом, все звезды Галактики за секунду производят $2 \cdot 10^{58}$ фотонов и, поскольку поперечник Галактики составляет около 10^3 световых лет (а в году $3 \cdot 10^7$ секунд), за время порядка 10^{11} секунд большинство из этих фотонов, если ничем не поглотятся, заведомо покинут Галактику. Следовательно, максимально возможное число фотонов, произведенных звездами и находящихся в Галактике, составляет $2 \cdot 10^{69}$ (и эта оценка существенно завышена).

Однако звезды не являются единственным источником излучения. В Галактике присутствует реликтовое излучение, которое является чернотельным с температурой $T \approx 2.7$ K и изотропным, и концентрация фотонов которого везде тем самым составляет $n \approx 20 \cdot 2.7^3 = 4 \cdot 10^2$ см$^{-3}$. Считая, что радиус Галактики равен 50 тыс. световых лет, получаем объем диска Галактики, составляющий $6 \cdot 10^{66}$ см^3, в котором должно находиться $2 \cdot 10^{69}$ реликтовых фотонов.

Таким образом, получается, что общее число реликтовых фотонов и завышенная оценка числа «звездных» фотонов примерно совпадают, откуда следует, что определяющими являются реликтовые фотоны. Если оценивать размеры Галактики с учетом не только диска (в котором в основном сосредоточены звезды), то разница будет еще более заметной, поэтому для порядковой оценки можно взять количество фотонов реликтового излучения, округлив порядок вверх — до 10^{70} штук.

5. Космический аппарат находится на геостационарной орбите Земли. Удельный импульс его двигателя 4500 м/с. Масса космического аппарата без топлива составляет одну тонну. Масса топлива — 6.4 тонны. Сможет ли он покинуть Солнечную систему? Если нет — почему? Если да — как?

Решение (8 баллов):

Для начала определим, на какую величину скорость космического аппарата может быть увеличена непосредственно тягой двигателя. Воспользуемся формулой Циолковского:

$$\Delta v = I \cdot \ln\left(\frac{m_2}{m_1}\right) = 9 \text{ км/с},$$

где m_2 — масса космического аппарата с топливом, m_1 — масса космического аппарата без топлива, а I — удельный импульс двигателя.

Геостационарная орбита Земли — экваториальная орбита, период обращения на которой равен периоду обращения Земли, то есть (здесь и далее все величины в СИ, если не указано обратное):

$$a_0 = \sqrt[3]{\frac{GM_E T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{7 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (86 \cdot 10^3)^2}{4\pi^2}} = 4 \cdot 10^4 \text{ км}.$$

Скорость космического аппарата на этой орбите составит:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_E}{a_0}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{4 \cdot 10^7}} = 3 \text{ км/с}.$$

Найдем скорость на бесконечном отдалении от Земли, записав закон сохранения энергии:

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{mv_s^2}{2} - \frac{GM_E m}{a_0},$$

где v_s — скорость старта, в данном случае просто $v_0 + \Delta v$.

Подставив все величины и посчитав (в км/с), получим:

$$u = \sqrt{2v_0 \Delta v - v_0^2 + \Delta v^2} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 9 - 3^2 + 9^2} = 11 \text{ км/с}.$$

Для того, чтобы вылететь за пределы Солнечной системы при бесконечном удалении от Земли, скорость космического аппарата должна быть не меньше, чем $(\sqrt{2} - 1)v_E$, т.е. 12 км/с (при сонаправленных векторах скорости космического аппарата и Земли, в других случаях потребуется большая скорость). Однако же это не оптимальный вариант полета. Есть более выгодная траектория, по которой космический аппарат и сможет покинуть Солнечную систему.

Существует так называемый эффект Оберта. Он заключается в том, что ракетный двигатель, движущийся с высокой скоростью, совершает больше полезной работы, нежели такой же двигатель, движущийся медленно. Это несложно понять из следующих соображений:

$$\frac{dE_k}{dt} = F\frac{ds}{dt} = F \cdot v$$

В таком случае, если совершать разгон с большей скоростью, прирост кинетической энергии будет больше. Теперь рассмотрим выгодную траекторию полета. Самый простой способ достичь большой скорости — опустить перицентр орбиты. Опустить его сколь угодно низко не получится из-за размеров Земли и земной атмосферы. Высоту орбиты низкоорбитальных спутников можно принять за $h \approx 500$ км, то есть перицентрическое расстояние составит $R_p = R_E + h \approx 7 \cdot 10^3$ км. Найдем эксцентриситет переходной орбиты космического аппарата. Очевидно, что апоцентрическое расстояние $R_a = a_0 = 4 \cdot 10^4$ км, тогда запишем уравнения для апоцентра и перицентра, где a — большая полуось переходной орбиты:

$$\begin{cases} a_0 = a(1+e) \\ R_p = a(1-e) \end{cases}$$

$$e = \frac{a_0 - R_p}{a_0 + R_p} \approx 0.7$$

Для перехода на такую орбиту космическому аппарату потребуется изменение скорости (по модулю):

$$\Delta v_1 = v_a - v_0 = v_0 - v_0\sqrt{1-e} = v_0(1 - \sqrt{1-e}) \approx 1.6 \text{ км/с}$$

Для дальнейшего разгона у космического аппарата останется:

$$\Delta v_2 = \Delta v - \Delta v_1 = 7.4 \text{ км/с}$$

Скорость космического аппарата при пролете перицентра составит:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_E(1+e)}{R_p}} = 10 \text{ км/с}$$

Вновь запишем закон сохранения энергии

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{mv_s^2}{2} - \frac{GM_E m}{R_p}$$

В данном случае $v_s = v_1 + \Delta v_2 = 17.4$ км/с и:

$$\frac{GM_E}{Rp} = \frac{7 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{7 \cdot 10^6} = 6 \cdot 10^1 \text{ км}^2/\text{с}^2$$

$$u = \sqrt{v_s^2 - \frac{2GM_E}{Rp}} = \sqrt{17.4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10^1} \approx \sqrt{300 - 120} = \sqrt{180} \approx 13 \text{ км/с}$$

$$13 \text{ км/с} > (\sqrt{2} - 1)v_E = 12 \text{ км/с}$$

Получается, что при полете по такой траектории космический аппарат сможет покинуть Солнечную систему. Почти все величины в этом решении были посчитаны с точностью до одной значащей цифры, тем не менее это достаточная оценочная точность для этой задачи. При более точном подсчете с помощью вычислительной техники получается такой же конечный ответ.

Заметим, что это не единственное возможное решение данной задачи. Даже при разгоне, описанном в первом случае, космическому аппарату хватит топлива чтобы долететь до, например, Юпитера, около которого он может совершить гравитационный маневр, тем самым набрав необходимую скорость для вылета из Солнечной системы. Рассмотрим пролет мимо Юпитера. Выше было получено (при подсчете первого варианта полета), что скорость космического аппарата в окрестности Земной орбиты составит $u_\pi = 41$ км/с. Тогда момент импульса космического аппарата составит $L = 41$ км/с $\cdot$ а.е. Большая полуось Юпитера $r = 5$ а.е. Большая полуось орбиты Земли $a_0 = 1$ а.е. Из закона сохранения энергии получим, что скорость космического аппарата в окрестности орбиты Юпитера составит:

$$u = \sqrt{{u_\pi}^2 + 2{v_E}^2\frac{(a_0 - r)}{r}} = 16 \text{ км/с}$$

Из закона сохранения момента импульса получим, что угол между скоростью и радиус-вектором составит:

$$\sin\alpha = \left(\frac{L}{ur}\right) = 0.5$$

Очевидно, что угол меньше 90^o, тогда $\alpha = 30^o$.

Теперь рассмотрим сам гравитационный маневр. В системе отсчета Юпитера скорость космического аппарата на бесконечности будет равна $\vec{V} = \vec{u} - \vec{\upsilon_J}$. Из треугольника векторов решением треугольника получим:

$$|\vec{V}| = \sqrt{\upsilon_J^2 + u^2 - 2\upsilon_J u \cos(90 - \alpha)} = 15 \text{ км/с}$$

Траектория пролета — гипербола. Найдем угол разворота (θ) из уравнения гиперболы в полярных координатах (из условия стремления расстояния к бесконечности):

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\phi}$$

$$\cos\phi_{max} = -\frac{1}{e}$$

$$\cos(\pi - \phi_{max}) = \frac{1}{e}$$

$$\cos\theta = \cos(\pi - 2(\pi - \phi_{max})) = -\cos(2\phi_{max}) = 1 - 2\cos^2\phi_{max} = 1 - \frac{2}{e^2}$$

В перицентре гиперболы скорость выражается через закон сохранения энергии:

$$\upsilon^2 = V^2 + \frac{2GM_J}{R}$$

Но в то же время это также:

$$\upsilon^2 = \frac{GM(1+e)}{R}$$

И также учтем, что вторая космическая скорость в точке пролета:

$$\frac{2GM}{R} = \upsilon_{II}^2$$

Из последних четырех выражений получим конечную зависимость угла разворота от начальной скорости и минимального расстояния пролета:

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{2\upsilon_{II}^4}{(2V^2 + \upsilon_{II}^2)^2}$$

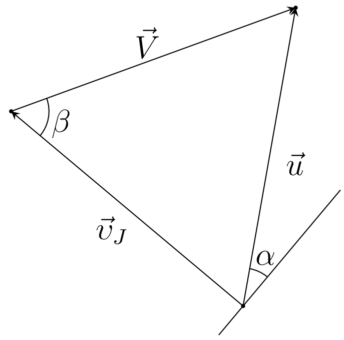
Максимальная скорость относительно Солнца после пролета будет в том случае, если угол разворота будет таков, что при удалении от Юпитера скорость космического аппарата будет сонаправлена со скоростью самого Юпитера. Теперь рассмотрим полученное выражение. При далеком пролете мимо Юпитера вторая космическая скорость будет много меньше V, и угол $\theta \approx 0$, т.е. фактически разворота не будет. При очень близком пролете мимо Юпитера угол разворота будет максимален и равен:

$$\upsilon_{IImax}^2 = \frac{2GM_J}{R_J} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{27}}{7 \cdot 10^7} = 4 \cdot 10^3 \text{ км}^2/\text{с}^2$$

$$\theta_{max} = \arccos\left(1 - \frac{2\upsilon_{IImax}^4}{(2V^2 + \upsilon_{IImax}^2)^2}\right) = \arccos\left(1 - \frac{2 \cdot 4^2 \cdot 10^6}{(2 \cdot 225 + 4000)^2}\right)$$

$$\theta_{max} = \arccos(-0.6) = \pi - \arccos(0.6) \approx 130^o$$

Получается, что КА при пролете мимо Юпитера может развернуться на любой угол от 0° до 130° (в зависимости от минимального расстояния пролета). Вернемся к треугольнику векторов.



Из теоремы синусов:

$$\sin\beta = \frac{\sin(90-\alpha)\cdot u}{V} = 0.9$$

$$\beta > 60^o$$

После пролета КА развернется, и его скорость может быть сонаправлена со скоростью Юпитера, если $\pi - \beta < \theta_{max}$. Это неравенство выполняется, значит после пролета скорость КА может быть сонаправлена с орбитальной скоростью Юпитера. Вспомним, что $V > \upsilon_J(\sqrt{2}-1)$. Получается, что КА сможет покинуть Солнечную систему и таким образом тоже.

Напоследок отметим, что это не единственный возможный вариант гравитационного маневра. Также возможны комбинации гравитационного маневра с эффектом Оберта.