XXVI Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

отборочный тур, решения

2019

до 17 января

11 класс

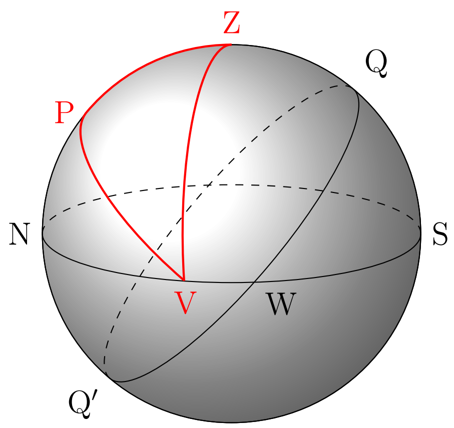
1. Насколько раньше или позже по всемирному времени наступит заход Солнца для наблюдателя в Екатеринбурге ($\varphi_E = 56°50', \lambda_E = 60°35'$) по сравнению с наблюдателем в Санкт-Петербурге ($\varphi_C = 59°57'$, $\lambda_C = 30°20'$) 27 июля? Рефракцией, видимыми размерами Солнца и уравнением времени пренебречь.

Решение (8 баллов):

Поскольку координаты наблюдателей указаны с точностью до угловой минуты, ответ следует получить достаточно точно (в частности, нельзя ограничиться утверждением, что широты городов близки, поэтому разница составит примерно 2 часа).

Начнем с определения склонения Солнца 27 июля. Для этого можно воспользоваться справочными данными или какой-либо расчетной программой, но можно и вычислить его с достаточной точностью. Если отсчитывать дни от момента летнего солнцестояния, тогда до 27 июля пройдет 36 дней и $\delta_\odot \approx 23°26' \cos\left(\frac{36}{365.25} \cdot 360°\right) = 19°05'$ (тем самым мы ошибемся примерно на $5'$).

Найдем часовой угол точки захода Солнца в обоих городах. Для этого нарисуем небесную сферу и построим параллактический треугольник:



и запишем теорему косинусов для угла при полюсе

$$\cos z_V = \cos(90° - \varphi)\cos(90° - \delta) + \sin(90° - \varphi)\sin(90° - \delta)\cos t.$$

Упрощая, получаем соотношение между часовым углом точки захода (t), широтой места (φ) и склонением объекта (δ) вида

$$\cos t = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta,$$

откуда для Санкт-Петербурга и Екатеринбурга следует

$$\cos t_E = -\operatorname{tg}\varphi_E \operatorname{tg}\delta_\odot \Rightarrow t_E = 8^h 08^m, \quad \cos t_C = -\operatorname{tg}\varphi_C \operatorname{tg}\delta_\odot \Rightarrow t_C = 8^h 27^m.$$

Местное время будет совпадать с истинным солнечным временем, которое отличается от часового угла истинного Солнца на 12 часов:

$$T_{m,E} = t_E + 12^h = 20^h 08^m,$$

$$T_{m,C} = t_C + 12^h = 20^h 27^m.$$

Определим время на Гринвиче — всемирное время — в данные моменты. Гринвичское время отличается от местного времени на данном меридиане на величину, равную часовой мере долготы данного меридиана:

$$T_{0,E} = T_{m,E} - 60°35'/15 = 20^h 08^m - 4^h 02^m = 16^h 06^m,$$

$$T_{0,C} = T_{m,C} - 30°20'/15 = 20^h 27^m - 2^h 01^m = 18^h 26^m.$$

Следовательно, заход Солнца в Екатеринбурге наступит раньше, чем в Санкт-Петербурге, на $2^h 20^m$. Заметим, что уравнение времени в один и тот же момент на различных долготах одинаково, так что его учет дал бы одинаковую поправку к времени захода, а интервал между заходами при этом не изменился бы.

2. Светимость звезды составляет $6.4 \cdot 10^3$ светимостей Солнца, температура — 4460 K. Представим, что звезду поместили на место Солнца. Между современных орбит каких двух планет располагалась бы поверхность данной звезды?

Решение (8 баллов):

По закону Стефана–Больцмана светимость, радиус и температура звезды связаны соотношением $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$. Сопоставив звезду с Солнцем, получим соотношение

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4 \quad \Longrightarrow \quad R = \sqrt{\frac{L}{L_\odot}} \left(\frac{T_\odot}{T}\right)^2 R_\odot \approx 1.3 \cdot 10^2 R_\odot.$$

Радиус Солнца равен $7 \cdot 10^5$ км; это значение можно получить из сопоставления видимых угловых размеров Солнца и величины астрономической единицы. Радиус звезды тогда равен $1.3 \cdot 10^2 \cdot 7 \cdot 10^5 = 9.1 \cdot 10^7$ км. Переведем это значение в астрономические единицы: $9.1 \cdot 10^7 / 1.5 \cdot 10^8 \approx 0.6$ а.е., что больше радиуса орбиты Меркурия, но меньше радиуса орбиты Венеры.

3. Поглощение света атмосферой Земли при наблюдениях в зените составляет $0^m.2$. Оцените, каким будет поглощение при наблюдении на зенитном расстоянии 60°.

Решение (8 баллов):

Поскольку атмосфера Земли достаточно тонкая (высота однородной атмосферы составляет примерно 8 км), можно считать, что при зенитном расстоянии 60° свет от объекта проходит через атмосферу расстояние, примерно в $1/\cos 60° = 2$ раза большее, чем в зените. Поскольку при прохождении атмосферы в зените поглощение составляет $0^m.2$, на зенитном расстоянии 60° оно окажется примерно в 2 раза больше, т.е. около $0^m.4$.

4. Два спутника обращаются по круговым орбитам над земным экватором так, что один пролетает над другим каждые 10 часов. Каковы их периоды обращения по орбите, если отношение радиусов их орбит равно 4?

Решение (8 баллов):

Из условий следует, что синодический период обращения S для одного спутника при наблюдении со второго равен 10 часам. Пусть T_1 и T_2 — периоды обращения спутников на низкой и высокой орбите, тогда

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_1} \mp \frac{1}{T_2},$$

где случай с «+» соответствует ситуации, когда один из спутников вращается в обратном направлении. Для определения соотношения периодов сопоставим параметры орбит по III закону Кеплера:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{1^{3/2}}{4^{3/2}} = \frac{1}{8}\,.$$

Отсюда в случае, если спутники обращаются вокруг Земли в одном направлении, получаем

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{8T_1} = \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{T_1} \quad \Longrightarrow \quad T_1 = \frac{7}{8}S = 8.75^h.$$

Тогда $T_2 = 8T_1 = 70^h$.

Если же направления обращения противоположные, то

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{8T_1} = \frac{9}{8}\cdot\frac{1}{T_1} \quad \Longrightarrow \quad T_1 = \frac{9}{8}S = 11.25^h.$$

Тогда $T_2 = 8T_1 = 90^h$.

5. Ведется радиолокация некоторого внешнего астероида, движущегося по круговой орбите в плоскости эклиптики. Установлено, что время прохождения радиосигнала до астероида в противостоянии в ξ раз меньше, чем в ближайшей (по времени) к противостоянию квадратуре. Постройте график зависимости интервала времени между противостоянием и квадратурой от параметра ξ.

Решение (8 баллов):

Для начала отметим, что поскольку орбита астероида круговая, ретроградной являться не может (все такие орбиты в любом случае сильно вытянуты), и это позволит нам ограничиться рассмотрением только одного случая — когда Земля и астероид вращаются вокруг Солнца в одном направлении.

Запишем уравнение на a — радиус орбиты (здесь и далее все расстояния измеряются в а.е.):

$$\xi(a-1) = \sqrt{a^2-1}$$

Решая его, получаем:

$$a = \frac{\xi^2+1}{\xi^2-1}$$

Значит, период из III закона Кеплера (измеренный в годах, как и все последующие величины с размерностью времени) вычисляется как

$$T = \sqrt{a^3} = \sqrt{\left(\frac{\xi^2+1}{\xi^2-1}\right)^3}$$

В момент противостояния Земля и астероид находятся в одном и том же направлении от Солнца, после чего Земля движется по орбите с угловой скоростью 2π, а астероид — $2\pi/T$. В момент квадратуры угол между направлениями на Землю и на астероид из Солнца станет равным $\alpha = \arccos(1/a) = \arccos\left(\frac{\xi^2-1}{\xi^2+1}\right)$, и время t, которое пройдет между противостоянием и квадратурой, можно будет получить из выражения

$$2\pi\cdot\left(1-\frac{1}{T}\right)\,t = \alpha.$$

Таким образом, итоговая зависимость выглядит следующим образом:

$$t = \frac{\arccos \frac{\xi^2-1}{\xi^2+1}}{2\pi \left(1 - \left(\frac{\xi^2-1}{\xi^2+1}\right)^{3/2}\right)}.$$

График придется либо построить по точкам, либо воспользоваться каким-нибудь графопостроителем. Результат должен выглядеть примерно так: