XXV Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

отборочный тур, решения

2017–2018

15 декабря
18 января

---

9 класс

---

1. На каких широтах полярная ночь представляет из себя действительно ночь, т.е. даже в полдень небо достаточно темное и видны звезды, по крайней мере, самые яркие?

Решение (8 баллов):

Пока Солнце находится на высотах от $0°$ до примерно $-6°$, продолжаются так называемые гражданские сумерки. Конец гражданских сумерек и начало навигационных сумерек происходят при достижении Солнцем высоты $-6°$, в это время начинают быть уверенно видны яркие звезды. Соответственно, требуется найти области, в которых Солнце во время зимнего солнцестояния не поднимается выше $-6°$.

Высота объекта в верхней кульминации (для северного полушария и объекта, кульминирующего к югу от зенита) составляет $h = 90° - \varphi + \delta$, где δ — склонение объекта, φ — широта места наблюдения. Поскольку в момент зимнего солнцестояния склонение Солнца $\delta = -23°.4$, получаем, что в предельном случае $-6° = 90° - \varphi - 23°.4$. Отсюда , $\varphi \approx 73°$. Учитывая, что в южном полушарии ситуация аналогична, записываем окончательный ответ: $|\varphi| \geqslant 73°$.

2. Большая полуось орбиты астероида составляет 1.5 а.е., эксцентриситет равен 0.3, наклон к плоскости эклиптики равен нулю. Найдите отношение максимального и минимального возможных расстояний между астероидом и Землей.

Решение (8 баллов):

Найдем перигелийное r_π и афелийное r_α расстояния для астероида. Если a — это большая полуось его орбиты, а e — эксцентриситет, то $r_\pi = a(1-e) = 1.05$ а.е., а $r_\alpha = a(1+e) = 1.95$ а.е. Поскольку астероид движется в плоскости эклиптики, минимум расстояния между ним и Землей будет достигаться тогда, когда астероид находится в перигелии своей орбиты и одновременно в противостоянии, а максимум — когда астероид в афелии и в соединении. Соответственно, отношение максимального и минимального возможных расстояний составляет

$$\frac{r_\alpha + 1}{r_\pi - 1} = \frac{2.95}{0.05} = 59.$$

Еще большим отношение получится, если учесть, что орбита Земли не является круговой. Эксцентриситет орбиты Земли $e_\oplus \approx 0.02$, поэтому перигелийное расстояние Земли составляет $r_{\pi\oplus} = 0.98$ а.е., а афелийное $r_{\alpha\oplus} = 1.02$ а.е. Очевидно, что максимальное расстояние от Земли до астероида в результате учета этой поправки фактически не меняется, а вот минимальное составит $1.05 - 1.02 = 0.03$ а.е., т.е. оно в $5/3$ раза меньше предыдущей оценки, что увеличивает итоговый ответ в те же $5/3$ раза. Получаем, что отношение расстояний составит $90 \div 100$ раз (с большей точностью ответ получать не нужно, да и нельзя — для этого недостаточно точны исходные данные об орбите астероида).

3. Вторая «Звезда Смерти», имеющая диаметр 900 км, вышла на круговую орбиту вокруг Земли. Каким мог быть период ее обращения вокруг Земли, если известно, что для наблюдателей на поверхности Земли «Звезда Смерти» иногда полностью затмевала Солнце?

Решение (8 баллов):

Для того, чтобы «Звезда Смерти» могла затмить Солнце, необходимо, чтобы ее угловой диаметр для земного наблюдателя хотя бы иногда превосходил угловой диаметр Солнца (который известен и составляет около $30'$). Рассмотрим предельный случай, когда угловые диаметры совпадают, и найдем, на каком расстоянии от наблюдателя при этом должна находиться «Звезда Смерти».

Поскольку угловой диаметр «Звезды Смерти» достаточно мал, можно считать, что ее линейный диаметр равен расстоянию до нее, умноженному на $30'$, выраженных в радианах. Так как в одном радиане примерно $2 \cdot 10^5$ угловых секунд, то угловой диаметр «Звезды Смерти» в радианах равен $30 \cdot 60/(2 \cdot 10^5) = 9 \cdot 10^{-3}$. Следовательно, расстояние до нее составляет $900/(9 \cdot 10^{-3}) = 10^5$ км.

Так как радиус Земли существенно меньше ($6.4 \cdot 10^3$ км), то можно считать, что полученная нами величина является максимально возможным радиусом орбиты «Звезды Смерти», тем самым мы пренебрегаем разницей между расстоянием до нее от наблюдателя и от центра Земли. Осталось вычислить период обращения спутника Земли, двигающегося по круговой орбите с данным радиусом. Для этого можно воспользоваться, например, III законом Кеплера или решить задачу о движении спутника по круговой орбите.

Можно также воспользоваться тем, что на Земле периодически происходят полные затмения Солнца Луной, и при этом угловые размеры диска Луны практически совпадают с угловыми размерами диска Солнца. Следовательно, чтобы хотя бы иногда затмевать Солнце, «Звезда Смерти» должна находиться от центра Земли на расстоянии, которое во столько же раз (k) меньше, чем расстояние от Земли до Луны, во сколько раз диаметр станции меньше диаметра Луны (3400 км). Тогда, по III закону Кеплера, период обращения «Звезды Смерти» будет в $k^{3/2}$ меньше периода обращения Луны вокруг Земли, равного 27.3 суток. Таким образом, период обращения станции равен

$$27.3 \cdot \left(\frac{900}{3400}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 3.7 \text{ суток.}$$

4. АМС, находящаяся на расстоянии 35 а.е. от Солнца, наблюдает Юпитер в верхнем соединении. Оцените видимую звездную величину Юпитера. Радиус орбиты Юпитера равен 5 а.е.

Решение (8 баллов):

Поскольку Юпитер находится в верхнем соединении, он расположен на небе рядом с Солнцем и его фаза максимальна (т.е. для АМС он находится почти за Солнцем). Следовательно, расстояние от него до АМС в этот момент составляет $35 + 5 = 40$ а.е. Когда Юпитер наблюдается в противостоянии с Земли, его фаза также максимальна, но расстояние от него до Земли составляет 4 а.е. Условия освещения Юпитера Солнцем в обоих случаях одинаковы, поэтому разница звездных величин при наблюдении с АМС и с Земли будет обусловлена только разницей в расстояниях от них до Юпитера. Поскольку расстояния отличаются в 10 раз, то создаваемые Юпитером освещенности будут отличаться в $10^2 = 100$ раз, а это соответствует разнице на 5^m. При наблюдении с Земли в максимуме блеска Юпитер достигает -3^m, следовательно, для АМС он будет объектом с блеском $+2^m$.

5. Предполагается, что в галактике Маркарян 231 в центральной области находятся две сверхмассивные черные дыры с массами 150 миллионов масс Солнца и 4 миллиона масс

Солнца. Данные черные дыры обращаются друг вокруг друга с периодом 1.2 года по круговым орбитам. Известно также, что вокруг Солнца обращается транснептуновый объект Седна. Можно ли уместить орбиту Седны между этими двумя черными дырами, если расположить ее в той же плоскости, что и орбиты черных дыр?

Решение (8 баллов):

Большую полуось взаимной орбиты двух черных дыр вычислим по III закону Кеплера, сопоставив данную весьма экзотическую систему с Солнечной:

$$\frac{P^2}{a_M^3} = \frac{1}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2},$$

где P — период обращения, выраженный в годах, a_M — большая полуось взаимной орбиты, выраженная в астрономических единицах, $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ — сумма масс черных дыр, выраженная в массах Солнца. Подставляя в формулу данные в условии значения, получим величину большой полуоси, равную $a_M \approx 6 \cdot 10^2$ а.е. Поскольку большая полуось взаимной орбиты — это одновременно и среднее расстояние между телами, а черные дыры по условию вращаются друг вокруг друга по круговым орбитам, то тем самым мы получили расстояние между ними.

Данные об орбите Седны необходимо где-либо найти. Воспользуемся, например, Википедией, и выясним, что большая полуось орбиты Седны составляет $a \approx 540$ а.е. Отсюда можно сразу же сделать вывод, что расстояние между перигелием и афелием орбиты Седны (равное удвоенной большой полуоси) больше, чем расстояние между черными дырами в Маркарян 231.

Однако следует вспомнить, что орбиты многих транснептуновых объектов обладают значительными эксцентриситетами. Для Седны это также верно (иначе мы просто не могли бы ее наблюдать), эксцентриситет ее орбиты составляет $e = 0.86$. Поскольку малая полуось эллипса b связана с его большой полуосью a и эксцентриситетом e соотношением $b = a\sqrt{1-e^2}$, получаем, что малая полуось орбиты Седны составляет $b \approx 276$ а.е. и, соответственно, малая ось орбиты будет равна около 550 а.е. Поскольку минимальный диаметр эллипса — это как раз его малая ось, получаем, что если орбиту Седны расположить так, чтобы ее большая ось была почти перпендикулярна прямой, соединяющей черные дыры, то ее удастся уместить между ними.