

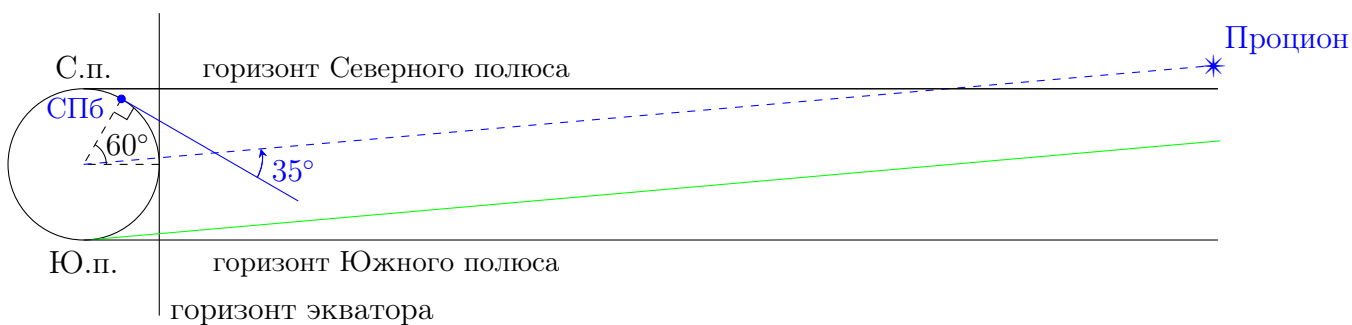
7–8 классы

1. Максимальная высота над горизонтом звезды Прокцион для наблюдателя в Санкт-Петербурге составляет 35° . Верно ли утверждение, что везде, где на Земле водится енот-полоскун (*Procyon lotor* на латыни), виден «небесный собрат» енота?

Решение (8 баллов):

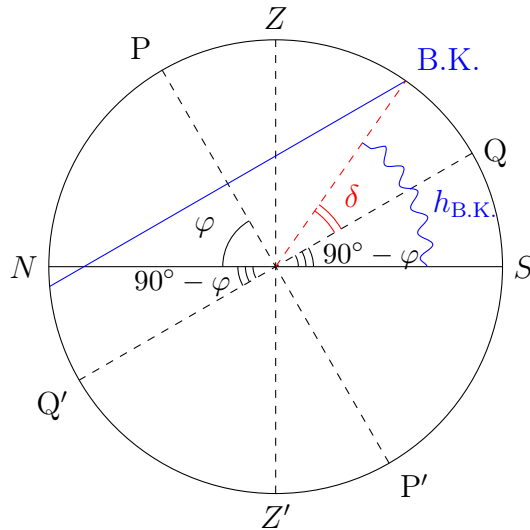
Основная часть задачи состоит в том, чтобы выяснить, в каких местах Земли в принципе можно увидеть Прокцион. Это можно сделать как минимум двумя способами, один из которых предполагает наличие базовых знаний сферической астрономии, а во втором можно обойтись и без них. Начнем со второго.

Построим чертеж, на котором нарисуем Землю, Санкт-Петербург (СПб) на ней и его горизонт (синяя сплошная линия), а также удаленный (на самом деле на куда большее расстояние, но размеры листа бумаги ограничены) Прокцион. Видно, что максимальная высота Прокциона над горизонтом (или угол между линией горизонта и направлением на Прокцион) будет в том случае, когда СПб ближе всего к Прокциону (именно этот случай и изображен на чертеже).



Поскольку Прокцион на самом деле находится на намного большем расстоянии, с Земли он будет наблюдаться в направлении, параллельном направлению из центра Земли (на рисунке оно отмечено синей штрихованной линией). Построив несколько таких параллельных прямых, мы обнаружим, что остается только маленькая область в окрестности Южного полюса Земли, в которой Прокцион не будет виден ни при каком положении Земли (предельная прямая для самой южной широты, на которой Прокцион еще можно увидеть, изображена на рисунке зеленым). Аккуратный чертеж позволит даже найти нужную широту, но для получения итогового ответа это не обязательно.

Аналогичный вывод можно получить более формальным путем. В момент наибольшей высоты над горизонтом светило находится в верхней кульминации (В.К.). В этот момент высота светила связана с широтой φ и склонением δ по формуле $h = 90^\circ - \varphi + \delta$. Отсюда получаем, что склонение Прокциона равно $\delta = h + \varphi - 90^\circ = 5^\circ$. Таким образом, звезда Прокцион находится в северном полушарии небесной сферы и видна для всех наблюдателей в северном полушарии Земли.



Оценим минимальное значение широты, на которой виден Прокцион. В этом случае при видимости Прокциона на горизонте его высота составит 0° :

$$0^\circ = 90^\circ - |\varphi - \delta|.$$

Отсюда наиболее южная широта видимости Прокциона составляет 85° ю.ш. (и, как видим, это действительно довольно близко к Южному полюсу). Таким образом, Прокцион нельзя увидеть в круге радиусом 5° (или $500 \div 600$ км) вокруг Южного полюса.

Осталось ответить на основной вопрос задачи. Даже при весьма скромных познаниях в биологии несложно вспомнить, что территория 85° ю.ш. и южнее — это самый центр Антарктиды, где не водятся не только еноты, но даже пингвины с тюленями. Следовательно, везде, где водится енот-полоскун (а он на самом деле живет только в Северном полушарии Земли), он может по ночам любоваться одноименной звездой.

2. С какой пространственной скоростью геостационарный спутник движется относительно точки экватора, над которой находится? Геостационарным спутником называется спутник, вращающийся вокруг Земли в плоскости экватора таким образом, что он постоянно находится над одной и той же точкой экватора (на высоте 36 тыс. км над ней).

Решение (8 баллов):

То, что спутник постоянно находится над одной точкой экватора, означает, что он совершает полный оборот вокруг Земли за то же время, за которое точка на экваторе Земли совершает полный оборот, т.е. за 24 часа (точнее за звездные сутки — 23^h56^m , но в дальнейших расчетах такая точность явно чрезмерна). Радиус орбиты спутника равен сумме высоты h , на которой он находится, и радиуса Земли R_\oplus . Полная длина орбиты спутника равна $2\pi(R_\oplus + h)$. Он ее проходит за время T , за которое точка экватора проходит окружность экватора, т.е. $2\pi R_\oplus$.

Скорости спутника и точки на экваторе сонаправлены, но скорость спутника больше (поскольку за одно и то же время он проходит большее расстояние). Следовательно, чтобы найти относительную скорость, надо из скорости спутника вычесть скорость точки на экваторе (расстояния при этом мы будем измерять в километрах, а время — в часах):

$$v_{\text{отн}} = v_{\text{сп}} - v_{\text{экр}} = \frac{2\pi(R_\oplus + h)}{T} - \frac{2\pi R_\oplus}{T} = \frac{2\pi h}{T} = \frac{2\pi \cdot 36 \cdot 10^3}{24} \approx 10^4 \text{ км/час.}$$

3. В полдень 22 марта в столице Болгарии Софии в комнате с закрытым занавеской окном на противоположной окну стене комнаты виден «зайчик» от дырки в занавеске. Расстояние между окном и противоположной стеной равно 5 метрам. В какую сторону движется «зайчик» для человека, смотрящего на него? Оцените скорость его движения.

Решение (8 баллов):

Болгария находится в Северном полушарии (и даже заведомо севернее Северного тропика), так что Солнце в ней в полдень будет находиться с южной стороны от зенита. Это означает, что для человека, смотрящего на Солнце, оно движется слева направо, и в том же направлении будет двигаться зайчик для человека, который будет смотреть на него.

Зайчик движется с той же угловой скоростью, что и Солнце, т.е. $15^\circ/\text{час}$ (поскольку дело происходит практически в день равноденствия, то за сутки Солнце на небе описывает большой круг — 360°). Поскольку Солнце и зайчик всегда находятся с противоположных сторон от дырки в занавеске, то и зайчик также будет перемещаться с угловой скоростью $15^\circ/\text{час}$.

Осталось понять, на каком расстоянии зайчик будет находиться от дырки. В самом деле, поскольку Солнце находится не на горизонте, то и расстояние от дырки до зайчика не равно расстоянию от окна до стены. Широту Болгарии можно грубо считать равной 45° (в решении можно использовать оценки в очень широких пределах — от 30° до 60°), и тогда нам надо найти длину гипотенузы прямоугольного треугольника, в котором один из углов равен широте Болгарии, а противолежащий катет — 5 метрам. Это можно сделать с помощью чертежа, и в результате окажется, что расстояние R от дырки до зайчика составляет от 6 до 10 метров.

Если Солнце за 24 часа проходит окружность, то и зайчик (если бы он двигался по сферической поверхности, а Земля была прозрачной) сделал бы то же самое. Тогда за сутки зайчик должен пройти расстояние $2\pi R$ — в пределах $40 \div 60$ метров. Делим это расстояние на 24 часа и получаем окончательный ответ: скорость зайчика составляет $1.5 \div 2.5$ метра в час.

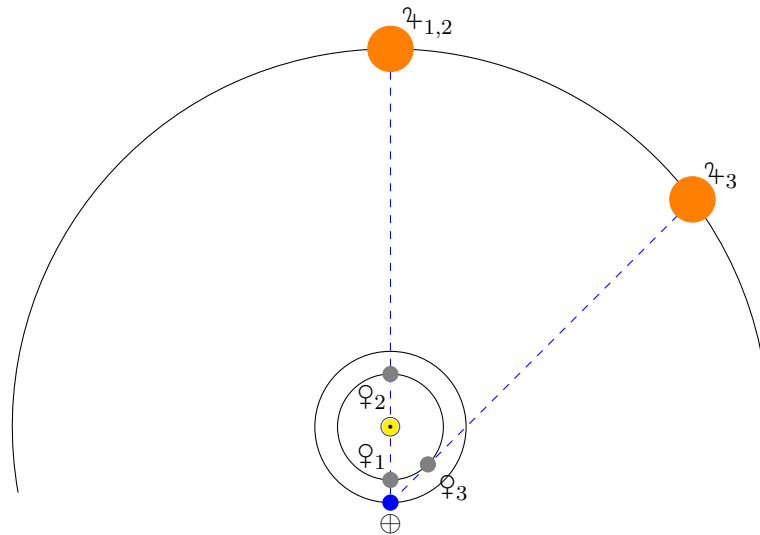
4. В какой-то момент произошло прохождение Венеры по диску Юпитера, видимое с Земли. Оцените максимально возможную и минимально возможную часть диска Юпитера, которая могла быть закрыта Венерой в момент максимальной фазы покрытия. Радиус орбиты Юпитера равен 5 а.е., радиус орбиты Венеры 0.7 а.е., радиус Юпитера в 12 раз больше радиуса Венеры.

Решение (8 баллов):

Изобразим возможное покрытие на чертеже (в масштабе). Сразу же можно отметить, что расстояние до Юпитера и, следовательно, угловой размер его диска Юпитера почти не меняются. До Венеры в положении 1 от Земли 0.3 а.е., в положении 2 — 1.7 а.е. До Юпитера в любом случае около 6 а.е. (аккуратный расчет показывает, что минимальное расстояние — в положении 3 — составит около 5.7 а.е., но на итоговый результат это никак не влияет).

В максимальной элонгации Венеры (положение 3) от Земли до Венеры 0.7 а.е. (что можно легко получить, воспользовавшись теоремой Пифагора), т.е. примерно в 2 раза больше, чем в нижнем соединении, т.е. это промежуточный случай между двумя крайними: максимально возможная закрытая часть будет, когда Венера в нижнем соединении, а минимальная — когда в верхнем.

Сравним угловые размеры Юпитера и Венеры. Очевидно, что чем больше радиус планеты, тем больше угловые размеры. Чем дальше планета, тем меньше угловые размеры.



Максимальная часть (положение 1):

Юпитер по линейным размерам в 12 раз больше Венеры, но в $6/0.3 = 20$ раз дальше, следовательно, угловой размер Юпитера в таком положении будет в $20/12 \approx 1.6$ раза меньше, чем Венеры, следовательно, Венера может закрыть Юпитер полностью.

Минимальная часть (положение 2):

Юпитер в 12 раз больше Венеры, и всего в $6/1.7 \approx 3.5$ раза дальше, следовательно, угловой размер Юпитера в таком положении будет в $12/3.5 \approx 3.7$ раза больше, чем Венеры, поэтому Венера закроет примерно $1/3.7^2 \approx 1/14$ часть площади Юпитера.

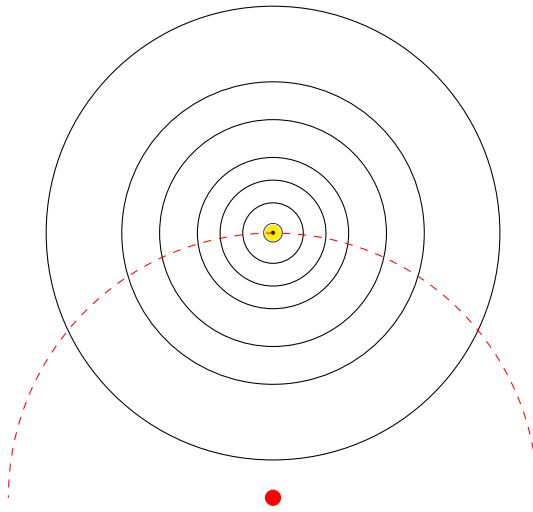
Заметим, что ближайшее подобное прохождение Венеры по Юпитеру, принципиально видимое с Земли (когда Венера будет близка к своему верхнему соединению), произойдет 22 ноября 2065 года. Конечно, из-за близости планет к Солнцу его будет трудно наблюдать.

А предыдущее прохождение Венеры по Юпитеру, видимое с Земли, случилось 200 лет назад: 3 января 1818 года.

5. Межзвездный корабль терпит бедствие на границе Солнечной системы. Капитан корабля посылает радиосигнал ко всем большим планетам Солнечной системы. Сколько времени может пройти между приемами сигналов на планетах? Орбиты планет считать круговыми. Докажите, что существует такое расположение планет, при котором сигнал будет принят на всех планетах одновременно.

Решение (8 баллов):

Докажем сначала последнее утверждение. Посмотрим, как будет распространяться сигнал от корабля, находящегося на границе Солнечной системы в плоскости эклиптики (в которой примерно лежат орбиты всех планет). Спустя время Δt после отправления сигнала свет достигнет сферы радиуса $c\Delta t$, где c — скорость света. Значит, если планеты в какой-то момент времени будут располагаться на одной из таких сфер, то сигнал будет принят одновременно. Нарисуем семейство сфер для разных значений Δt и выберем такую, которая проходит через Солнце (см. рисунок ниже). Такая сфера пересечет и орбиты всех планет, значит, если в точках пересечения сферы с орбитами будут располагаться планеты, то сигнал на них будет получен одновременно. Таким образом, минимально возможное время между приемами сигналов на планетах равно 0.



Оценим максимальное время. Поскольку орбиты больших планет заключены в сфере с радиусом, равным радиусу орбиты Нептуна, то наибольшее расстояние между двумя планетами не может превосходить диаметра орбиты Нептуна. Время приема сигналов будет наибольшим в том случае, когда корабль, Солнце и две самых далеких от Солнца планеты, Уран и Нептун, расположены на одной линии, причем одна из планет расположена по другую сторону от Солнца относительно корабля. В данном случае разность времени приема сигнала будет равна времени, в течение которого сигнал пройдет расстояние, равное сумме радиусов орбит Нептуна и Урана. Радиус орбиты Нептуна равен примерно 30 а.е., радиус орбиты Урана — примерно 20 а.е. Поскольку известно, что расстояние 1 а.е. свет проходит примерно за 8 минут, то расстояние между планетами сигнал пройдет за $(30 + 20) \cdot 8 = 4 \cdot 10^2$ минут.