XXV Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

отборочный тур, решения

2017–2018

15 декабря
18 января

---

11 класс

---

1. Советская АМС Луна–10 с 3 апреля по 29 мая 1966 года совершила 460 оборотов вокруг Луны по эллиптической орбите. Определите максимально возможное угловое расстояние между АМС и центром Луны для наблюдателя с Земли, если минимальная высота полета АМС над поверхностью Луны составляла 350 км.

Решение (8 баллов):

Луна–10 за 56 суток сделала 460 витков, следовательно, орбитальный период АМС составлял примерно $P = 2.9$ часа. Зная или выяснив где-нибудь массу Луны ($7.3 \cdot 10^{22}$ кг), можно, воспользовавшись III законом Кеплера, определить большую полуось орбиты:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{☾}}.$$

Подставив числовые данные, получаем $a = 2.4 \cdot 10^3$ км.

Зная радиус Луны ($1.7 \cdot 10^3$ км) и высоту АМС над поверхностью Луны в перицентре орбиты, получаем, что перицентрическое расстояние составляло $r_\pi = 2.1 \cdot 10^3$ км. Отсюда, поскольку $r_\pi = a\,(1 - e)$, получаем эксцентриситет орбиты $e = 1/7$ и апоцентрическое расстояние $r_\alpha = a\,(1 + e) = 2.7 \cdot 10^3$ км. Очевидно, что именно оно будет соответствовать максимальному угловому расстоянию (когда прямая, соединяющая апоцентр орбиты и центр Луны, будет перпендикулярна лучу зрения).

Проще всего оценить угловое расстояние, если учесть, что апоцентрическое расстояние примерно в 1.6 раза больше радиуса Луны, а последний при наблюдении с Земли составляет около $15'$. Получаем, что искомое угловое расстояние составляет примерно $24'$. Полученную оценку можно улучшить, если учесть, что за почти два месяца возможных наблюдений Луна должна была проходить через перигей своей орбиты, и тогда для оценки максимального углового расстояния лучше взять максимально возможный угловой радиус Луны (около $17'$). Тогда ответ увеличивается до $27'$.

Комментарии после проверки. Задача не только основана на реальных данных (некоторые промежуточные результаты, в принципе, можно было даже не вычислять, а найти в интернете), но и ее результаты вполне поддаются проверке на соответствие здравому смыслу. Поэтому откровенно нелепые результаты (как окончательные, так и промежуточные) приводили к сильнейшему снижению оценки — вплоть до нуля. Если период обращения АМС вокруг Луны у Вас оказался равным 3 секундам или искомое угловое расстояние составило $70°$ (оба примера, увы, вполне реальны), то в этот момент следовало остановиться и подумать о том, что Вы явно сделали что-то не так. Также следует учитывать, что это задача не по математике: ответ в стиле «какой-то угол $+\pi \cdot k,\ k \in \mathbb{Z}$» тут явно неуместен.

Достаточно часто встречается путаница между минимальной высотой полета и расстоянием в перицентре орбиты (второе, естественно, больше на величину радиуса Луны). При их отождествлении эксцентриситет орбиты и, как следствие, апоцентрическое расстояние оказываются существенно завышенными, итоговый ответ — тоже.

Еще одна типичная ошибка — путаница между обращением Луны–10 вокруг Луны и самой Луны — вокруг Земли. Многие почему-то решили, что константа в III законе Кеплера (в его простейшем виде) в обоих этих случаях одна и та же.

Наконец, в этой задаче нет совершенно никакого смысла в получении ответа с точностью до тысячных долей угловой секунды. Помимо того соображения, что исходные данные, которыми Вы располагаете, недостаточно точны для получения результата с подобной точностью, можно заметить, что на расстоянии, равном большой полуоси орбиты Луны, угол $0''.001$ соответствует линейному расстоянию около 2 м, что примерно совпадает с размерами самой АМС.

2. Стандартная теория эволюции звезд утверждает, что 4 миллиарда лет назад наше Солнце излучало на 30% меньше энергии, чем сейчас. На основании этих данных оцените среднюю температуру на Земле в тот период, если считать, что орбита Земли и строение ее атмосферы в тот момент были в точности такими же, как сейчас.

Решение (8 баллов):

Пусть E — это освещенность, создаваемая сейчас Солнцем на орбите Земли. Поскольку орбита Земли за прошедшее время не изменилась, то 4 миллиарда лет назад освещенность равнялась $E_0 = 0.7E$.

Запишем баланс энергии для Земли в настоящий момент:

$$(1-A)E\pi R_\oplus^2 = K \cdot 4\pi R_\oplus^2 \sigma T^4$$

и 4 миллиарда лет назад:

$$(1-A)E_0\pi R_\oplus^2 = K \cdot 4\pi R_\oplus^2 \sigma T_0^4,$$

где $R_\oplus$ — радиус Земли (он за 4 миллиарда лет тоже не изменился), A — отражательная способность (по условию строение атмосферы осталось таким же, следовательно, и отражающая способность практически не поменялась), σ — постоянная Стефана-Больцмана, T и T_0 — средние температуры Земли сейчас и 4 миллиарда лет назад, K — коэффициент, учитывающий существование парникового эффекта.

Тем самым мы предполагаем, что часть теплового излучения Земли задерживается атмосферой и не выходит наружу (это и называется парниковым эффектом), причем доля задерживаемого излучения, равная K $(0 < K < 1)$, примерно постоянна. На самом деле это не идеальная модель парникового эффекта, поскольку распределение энергии в спектре излучения Земли зависит от температуры и относительная доля поглощенного излучения одной и той же атмосферой при разных температурах будет несколько различаться, но в качестве простого приближения ее можно использовать (отметим, что участники могут использовать и какую-либо другую модель — например, считать, что парниковый эффект увеличивает температуру на фиксированную величину).

Разделив два выражения для баланса энергии друг на друга, получим

$$\frac{E}{E_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^4 \Rightarrow T_0 = T\sqrt[4]{E_0/E} = T\sqrt[4]{0.7} \approx 0.9\,T.$$

Среднюю температуру Земли T можно оценить аналогичным образом, но при этом мы пренебрежем существованием парникового эффекта. Поэтому воспользуемся внешними данными и будем считать ее равной $2.9 \cdot 10^2$ K (без учета парникового эффекта она будет ниже). Следовательно, средняя температура на Земле 4 миллиарда лет назад была примерно $2.6 \cdot 10^2$ K, т.е. около -10°C.

Заметим, что этот результат противоречит палеоклиматическим данным, согласно которым в это время на Земле существовала жидкая вода в больших количествах. Считается, что это можно объяснить более существенным парниковым эффектом.

Комментарии после проверки. Типовой ошибкой при решении задачи был фактический неучет парникового эффекта. Конечно, в модели, изложенной в решении выше, соответствующий коэффициент сокращается, но как-то оговорить этот факт следовало бы.

Довольно часто решавшие забывали перевести среднюю температуру Земли в шкале Цельсия в абсолютную шкалу температур. Результат при этом получался существенно завышенным.

Как и в предыдущей задаче, два распространенных типа ошибок связаны с точностью и осмысленностью результата. Задача оценочная, поэтому получение итоговой температуры с точностью до сотых долей кельвина (или градуса Цельсия) явно лишено смысла. Очевидно нелепым является ответ, при котором средняя температура на Земле 4 миллиарда лет назад превышает современную.

3. 15 сентября 2014 года были впервые зарегистрированы гравитационные волны. Известно, что в результате слияния двух черных дыр в виде гравитационного излучения в течение 0.1 секунды высветилась масса, равная 3 массам Солнца. 17 августа 2017 года были впервые зарегистрированы гравитационные волны от двух слившихся нейтронных звезд. При этом слиянии в виде гравитационного излучения выделилось 0.03 массы Солнца за 100 секунд. Определите разность абсолютных «гравитационных звездных величин» этих событий.

Решение (8 баллов):

Средняя «гравитационная светимость» каждого из источников $L_i = m_i c^2/t_i$, где m_i — масса, выделившаяся в виде гравитационного излучения, t_i — время высвечивания, а c — скорость света.

Воспользуемся законом Погсона для абсолютных звездных величин M_i:

$$M_1 - M_2 = -2.5\lg\left(\frac{L_1}{L_2}\right) = -2.5\lg\left(\frac{m_1c^2}{t_1}\frac{t_2}{m_2c^2}\right) = -2.5\lg\left(\frac{m_1t_2}{m_2t_1}\right).$$

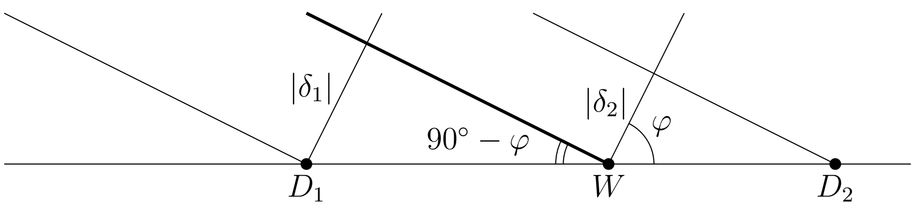
Подставив числовые данные, получаем

$$M_1 - M_2 = -2.5\lg\left(\frac{3\cdot 100}{0.03\cdot 0.1}\right) = -2.5\lg\left(\frac{3\cdot 100}{0.03\cdot 0.1}\right) = -2.5\lg 10^5 = -12^m.5.$$

4. Некоторая звезда имеет склонение $\delta_1 = -8^\circ$ и заходит за горизонт в некотором городе в точке с азимутом $A_1 = 74^\circ$. Какой азимут в момент захода будет иметь звезда со склонением $\delta_2 = 6^\circ$ при наблюдении из того же города? Какова широта этого города?

Решение (8 баллов):

Так как склонения звезд небольшие, то заход звезд происходит очень близко к точке запада. Можно воспользоваться плоским приближением и нарисовать схему захода обеих звезд в данном городе: горизонтальная линия — математический горизонт, W — точка запада, жирная линия — небесный экватор, две линии, параллельные экватору — суточные параллели обеих звезд, D_1 и D_2 — точки захода звезд:



Здесь φ — широта пункта наблюдения, а длина $|D_1W| = A_1' = 90^\circ - A_1 = 16^\circ$, так как азимут отсчитывается от точки юга в сторону запада.

Из рисунка очевидно соотношение: $|\delta_1| = A_1' \cos\varphi$. Тогда косинус широты можно легко найти: $\cos\varphi = 1/2 \Rightarrow \varphi = \pm 60^\circ$. Отметим, что ситуация для южного полушария симметрична, поэтому второй ответ формально имеет смысл (см. ниже).

Так как для второй звезды верно аналогичное соотношение, то $|D_2W| = A_2' = A_1'|\delta_2|/|\delta_1| = 12^\circ$, то есть азимут $A_2 = 90^\circ + A_2' = 102^\circ$.

Осталось сделать последний шаг. В условии задачи говорится о городе, в котором наблюдается описанная картина. Однако на широте 60° южной широты на Земле нет ни одного города. Поэтому из двух возможных ответов для широты остается только один — $\varphi = +60^\circ$.

Заметим, что задачу можно решить и более «честно», не используя плоское приближение и воспользовавшись формулами сферической тригонометрии. Подобное решение дает тот же результат и, естественно, не является ошибочным, хотя и несколько более трудоемко.

Комментарии после проверки. Большая часть участников воспользовалась формулами сферической тригонометрии, но в некоторых случаях это стало проблемой. При таком способе решения вычисляются синусы или косинусы азимута, восстановление по которым значения самого азимута не всегда было успешным. Совершенно типичной ошибкой была также потеря варианта с южным полушарием без какого-либо обоснования.

Ну и, увы, типовой для практически всех задач ошибкой оказалась желание части участников получить ответ с той точностью, которую может обеспечить имеющаяся вычислительная техника. В этой задаче определение азимута и широты с точностью до сотых долей секунды невозможно, соответственно, подобные ответы считались грубой ошибкой.

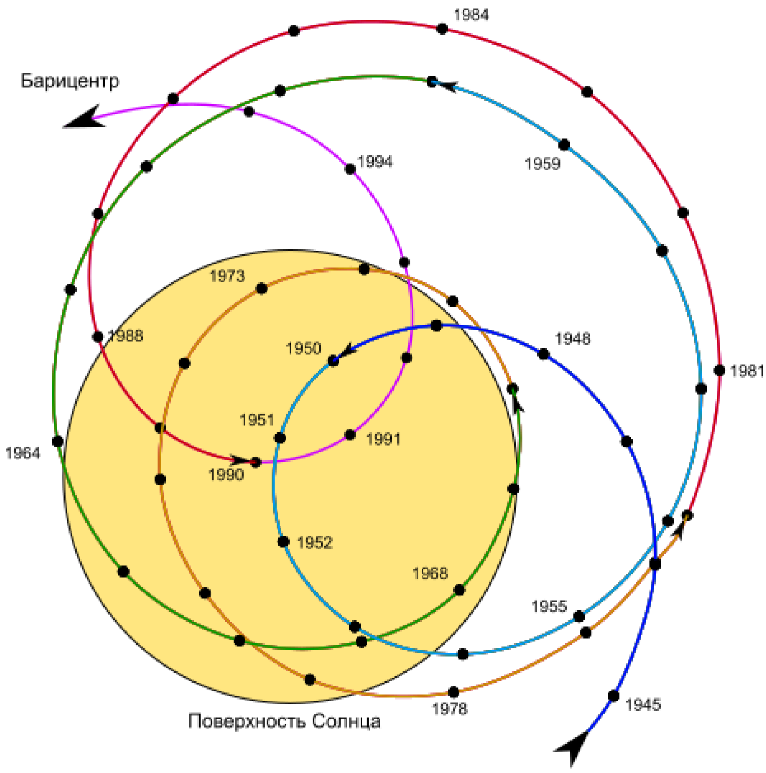
5. Пусть инопланетный наблюдатель изучает нашу Солнечную систему из окрестностей звезды χ Dra. Какую планету он откроет первой и каким методом?

Решение (8 баллов):

Практически все методы обнаружения внесолнечных планет существенно зависят от угла между лучом зрения и плоскостью орбиты планеты, поэтому в интересущем нас случае результат должен зависеть от положения звезды относительно плоскости эклиптики. Известно, что в созвездии Дракона находится северный полюс эклиптики, так что, по-видимому, для наблюдателя плоскости орбит планет Солнечной системы будут фактически перпендикулярны лучу зрения. Поиск данных о звезде действительно показывает, что ее эклиптическая широта составляет $+83^\circ.6$, и это означает, что методы, предполагающие, что луч зрения лежит в плоскости орбиты, в данном случае не сработают.

Таким образом, наблюдать прохождения планет по диску Солнца инопланетный наблюдатель точно не сможет. Изменение лучевой скорости звезды из-за обращения ее вместе с планетами вокруг общего центра масс будет очень малым и практически ненаблюдаемым (можно, например, вспомнить, что внесолнечные планеты даже с массой порядка массы Юпитера, обнаруженные таким методом, все находятся существенно ближе к своей звезде, чем Юпитер). Тем самым два наиболее эффективных метода обнаружения внесолнечных планет неработоспособны.

Движение Солнца вокруг барицентра Солнечной системы можно было бы попытаться обнаружить и астрометрическим методом, однако несложно убедиться, либо сделав соответствующую оценку, либо просто найдя готовый результат вроде нижеприведенного:



что максимальное смещение центра Солнца относительно барицентра Солнечной системы примерно совпадает с диаметром Солнца. Это означает, что его можно было бы обнаружить обычными методами в том случае, если доступное угловое разрешение позволяет разрешить диск Солнца. Поскольку прямые наблюдения диска пока невозможны даже для большей компоненты α Cen, которая похожа на Солнце и является ближайшей (не считая Проксимы Центавра) звездой к Солнцу, то этот вариант исключен.

Однако оценим все-таки требуемую точность угломерных измерений. Расстояние до χ Dra можно разыскать, оно составляет около 8 пк. Поскольку диаметр Солнца составляет около 0.01 а.е., то его угловой размер при наблюдении от интересующей нас звезды окажется около $0''.001$. Прямые наблюдения с таким разрешением невозможны, но тем не менее подобная астрометрическая точность в оптическом диапазоне уже реализуема (хотя подобная возможность и появилась совсем недавно, с запуском космического инструмента "Gaia"). Следовательно, этот метод можно реализовать, однако он явно не будет первым результативным.

Можно вспомнить про метод гравитационного микролинзирования. На самом деле в данной ситуации он принципиально непригоден: расстояние, на котором можно будет наблюдать эффект линзирования, превышает расстояние между χ Dra и Солнцем, однако исключить его можно, исходя из существенно более простого соображения: для него практически точно между этими звездами должна пролететь еще одна звезда. Поскольку расстояние от нас до χ Dra сравнительно невелико, вероятность подобного события ничтожно мала (и, более того, можно наверняка сказать, что в последние несколько миллионов лет ничего подобного не происходило).

Остается только один вариант — прямые наблюдения. Если делать это в оптическом диапазоне, то наиболее предпочтительными кандидатами будут планеты, которые одновременно и достаточно большие (чтобы быть поярче), и достаточно далекие от Солнца (чтобы их было проще наблюдать рядом с Солнцем).

Начнем с Юпитера. В максимуме блеска при наблюдении с Земли он имеет примерно -3^m (с расстояния около 4 а.е.), однако инопланетному наблюдателю придется наблюдать его с расстояния, в $4 \cdot 10^5$ раз большего. На таком расстоянии блеск Юпитера будет в $(4 \cdot 10^5)^2 = (10^6/2.5)^2 = 10^{12}/(2.5)^2$ раз слабее, т.е. его видимая звездная величина будет больше на 28^m. Надо также учесть, что при максимальном угловом расстоянии

Юпитера от Солнца будет видна только половина диска, так что в итоге для инопланетного наблюдателя Юпитер станет объектом с видимой звездной величиной примерно $+26^m$. Наблюдать такой объект, тем более рядом с Солнцем, трудно, но все же возможно (на HST), так что этот вариант, по-видимому, предпочтительнее предыдущего. Заметим, что несколько слабее (но при этом дальше от Солнца) будет Сатурн, так что, возможно, его удастся обнаружить раньше.

Однако наблюдать можно не только в оптическом диапазоне. Есть еще и радиодиапазон, а в нем (в диапазоне УКВ) Земля существенно ярче Солнца (и, естественно, всех других планет Солнечной системы). Поэтому если инопланетный наблюдатель наблюдает Солнечную систему сейчас, то именно Земля будет обнаружена первой. Однако поскольку это радиоизлучение имеет техногенное происхождение, то еще век назад ситуация была совершенно другой и наиболее эффективным методом были прямые оптические наблюдения.

Комментарии после проверки. К сожалению, достаточно типовой ошибкой было игнорирование условия задачи. Многие участники знают, что наибольшее число внесолнечных планет открыто транзитным методом и сразу же делают отсюда вывод, что он пригоден и в данном случае. Не менее часто встречались чисто текстовые решения, в которых предлагался тот или иной метод, но не делалось никаких попыток оценить возможность его использования в данном конкретном случае. Наконец, возможность наблюдений не только в оптическом диапазоне в принципе рассматривалась крайне редко, это сделали единичные участники.