XXV Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2018

4 февраля

---

11 класс

---

1. В повести Н. Носова «Незнайка на Луне» приключения главного героя проходили внутри полой Луны, среди коротышек, живущих на ядре внутри Луны. Представим, что в результате тотальной войны между обитателями Луны внешняя оболочка распалась на небольшие фрагменты, не связанные друг с другом. За какое время эти фрагменты упадут на ядро? Считайте, что масса Луны распределена поровну между ядром и оболочкой, масса оболочки распределена по ней равномерно, толщина оболочки и размер ядра пренебрежимо малы в сравнении с радиусом Луны.

Решение (8 баллов):

Движение каждого отдельного малого кусочка оболочки можно рассматривать как движение под действием ускорения, создаваемого гравитацией ядра и остальной оболочки. Выделим малый кусочек массы и найдем эти две составляющие. Пусть в некоторый момент радиус оболочки равен r. Тогда, по закону всемирного тяготения, ускорение кусочка оболочки вследствие притяжения его ядром равно $g_{я} = \frac{GM_{\leftmoon}}{2r^2}$, где $M_{\leftmoon}$ — масса Луны (по условию она разделилась поровну между маленьким ядром и абсолютно тонкой оболочкой).

С оценкой ускорения, создаваемого остальной оболочкой, дело обстоит несколько сложнее. Пусть кусочек массы dm имеет площадь dS. Известно, что потенциальная энергия самогравитирующей сферы массы M и радиуса r равна $\Phi = -\frac{GM^2}{2r}$ (в нашем случае $M = M_{\leftmoon}/2$). Пусть сила гравитации, приходящаяся на единицу площади оболочки, равна p (фактически эта величина имеет смысл давления, действующего на оболочку). Мысленно изменим радиус сферы на величину dr и запишем закон сохранения энергии, чтобы найти p:

$$A = p\,dV = p\,4\pi r^2\,dr = -d\Phi = -d\left(\frac{GM^2}{2r}\right) = \frac{GM^2}{2r^2}\,dr.$$

Отсюда

$$p = \frac{GM^2}{2r^2\,4\pi r^2},$$

а сила гравитации, действующей на кусочек массой dm и площадью dS, равна $F = p\,dS$. Заметив, что $\frac{M\,dS}{4\pi r^2} = dm$, получаем, что

$$F = p\,dS = \frac{GM\,dm}{2r^2},$$

т.е. гравитационное ускорение, которое получает оболочка при воздействии самой на себя, равно ускорению, которая получала бы частица массы dm при воздействии на ее половины массы оболочки, сосредоточенной в центре.

Тот же вывод можно получить и другим способом, несколько менее честным, но не требующим привлечения информации о потенциальной энергии самогравитирующей сферы и дифференцирования. Рассмотрим оболочку конечной (хотя и малой) толщины и разделим ее на тонкие концентрические слои. В соответствии с теоремой Ньютона самый внешний слой притягивается остальной оболочкой так же, как материальной точкой с массой, равной массе оболочки, и расположенной в центре сферы. На самый внутренний слой — в соответствии с утверждением той же теоремы — оболочка просто не действует. Каждый же промежуточный слой притягивается только той массой оболочки, которая находится внутри него. Поскольку оболочка тонкая, то притягивающая некоторый слой масса линейно меняется с глубиной от полной массы оболочки до нуля, и в среднем произвольный малый кусочек оболочки притягивается массой, равной половине массы оболочки. Очевидно, что если устремить толщину оболочки к нулю, то полученный результат не изменится, а отсюда сразу же следует вывод, сделанный абзацем выше.

Таким образом, задача сводится к выяснению того, за какое время пробная частица, находящаяся с нулевой начальной скоростью на расстоянии, равном радиусу Луны $R_☾$, упадет на притягивающий центр, масса которого равна $\frac{3}{4}M_☾$. Вычисляя это время t с помощью III закона Кеплера как половину периода вырожденной эллиптической орбиты с большой полуосью, равной $R_☾ /2$, получаем

$$\frac{(2t)^2}{(R_☾ /2)^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot 3M_☾ /4},$$

откуда

$$t = \pi\sqrt{\frac{R_☾^3}{6GM_☾}}.$$

Далее можно либо оценить радиус Луны (например, как 1/4 радиуса Земли) и массу Луны (как 1/80 массы Земли), вычислив результат непосредственно, либо предварительно преобразовать полученное выражение к виду

$$t = \sqrt{\frac{\pi}{8G\rho}},$$

где $\rho = \frac{M_☾}{\frac{4}{3}\pi R_☾^3}$ — средняя плотность Луны. Последняя составляет примерно 3 г/см^3, но даже достаточно грубая оценка этой величины не слишком сильно изменит результат, поскольку $t \propto \rho^{-1/2}$. В итоге получаем, что время падения составит около 20 минут.

2. Солнечный парус, изначально покоившийся на земной орбите, вследствие солнечной вспышки приобрел скорость $v_0 = 3$ м/с, направленную от Солнца. Как далеко от Солнца он сможет улететь? Гравитационным взаимодействием с планетами пренебречь, парус полностью отражает все падающее на него излучение.

Решение (8 баллов):

Сила светового давления, действующая на покоящийся парус, компенсирует его притяжение к Солнцу:

$$\frac{L_\odot}{4\pi r^2}\frac{S}{c} - \frac{G\mathfrak{M}_\odot m}{r^2} = 0.$$

Это уравнение выполняется при любом гелиоцентрическом расстоянии паруса r. Означает ли это, что парус будет двигаться равномерно и покинет пределы Солнечной системы?

Нет! Если парус начинает двигаться, в игру вступает эффект Доплера. Рассмотрим фотон, летящий «вдогонку» парусу, движущемуся со скоростью v, и имеющий энергию E. В системе отсчета паруса его энергия меньше, чем в «солнечной»:

$$E' = E\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Хотя энергия фотона при отражении не меняется в системе отсчета паруса, в «солнечной» она составит уже

$$E'' = E'\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Таким образом,

$$E'' = E\left(1-\frac{v}{c}\right)^2 \approx E\left(1-\frac{2v}{c}\right).$$

Если бы парус покоился, при отражении этого фотона ему был бы передан импульс

$$\Delta p = \frac{2E}{c},$$

для движущегося же паруса

$$\Delta p'' = \frac{2E}{c}\left(1-\frac{2v}{c}\right).$$

Можем заключить, что на движущийся парус оказывается меньшая сила светового давления.

Уравнение движения паруса имеет вид

$$ma = \frac{L_\odot}{4\pi r^2}\frac{S}{c}\left(1-\frac{2v}{c}\right) - \frac{G\mathfrak{M}_\odot m}{r^2}$$

и с учетом условия равновесия для покоящегося паруса записывается как

$$ma = -\frac{2G\mathfrak{M}_\odot m}{r^2 c}v.$$

Домножим обе части на Δt:

$$\frac{mc}{2}\Delta v = -\frac{G\mathfrak{M}_\odot m}{r^2}\Delta r.$$

В правой части полученного соотношения стоит не что иное, как работа гравитационных сил. Мы вполне можем просуммировать ее, поскольку в результате получим просто разность гравитационных потенциальных энергий, взятую со знаком минус:

$$\frac{mc}{2}(v_1 - v_0) = \frac{G\mathfrak{M}_\odot m}{r_1} - \frac{G\mathfrak{M}_\odot m}{r_0}.$$

Потребуем, чтобы удалению r_1 соответствовала нулевая скорость $v_1 = 0$:

$$\frac{cv_0}{2} = G\mathfrak{M}_\odot\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}\right) = G\mathfrak{M}_\odot\frac{r_1 - r_0}{r_0 r_1}.$$

Таким образом,

$$\frac{r_1 - r_0}{r_1} = \frac{cv_0}{2}\left(\frac{G\mathfrak{M}_\odot}{r_0}\right)^{-1} = \frac{cv_0}{2v_\oplus^2} = \frac{3\cdot 10^8 \times 3}{2\times(3\cdot 10^4)^2} = \frac{1}{2};$$

$$r_1 = \frac{r_0}{1-1/2} = 2r_0.$$

Солнечный парус отлетит от Солнца и расположится на расстоянии 2 а. е. от него.

3. Транснептуновый объект (174567) Варда в настоящее время имеет видимую звездную величину 21^m (при наблюдении с Земли) и находится на расстоянии 48 а.е. от Солнца. Оцените диаметр Варды, если ее поверхность отражает 10% падающего на нее света. Видимая звездная величина Солнца (также при наблюдении с Земли) составляет -27^m.

Решение (8 баллов):

Определим, какое количество энергии от Солнца падает на единицу площади поверхности Варды — определим освещенность Варды. Освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника излучения, тогда освещенность Варды $E_\text{v} = L_\odot/4\pi r^2$.

Количество энергии, получаемое Вардой за секунду времени, равно $\mathcal{E} = E_{\rm v} \cdot \pi R^2$, где R — радиус Варды.

Определим освещенность, создаваемую Вардой на поверхности Земли. Поскольку нам точно не известно взаимное расположение Солнца, Земли и Варды, будем считать, что Варда удалена от Земли в среднем также на $r = 48$ а. е. Тогда освещенность, создаваемую Вардой для наблюдателя на Земле, можно оценить как

$$E = A\mathcal{E}/(2\pi r^2) = A(L_\odot/4\pi r^2) \cdot \pi R^2/(2\pi r^2) = AL_\odot R^2/8\pi r^4,$$

где $A = 0.1$. Значение радиуса можно определить, сравнив видимые звездные величины Варды и Солнца:

$$m_{\rm v} - m_\odot = 2.5 \lg \frac{E_\odot}{E} = 2.5 \lg \frac{L_\odot/4\pi a_\oplus^2}{AL_\odot R^2/8\pi r^4} = 2.5 \lg \frac{2r^4}{AR^2 a_\oplus^2}.$$

Выражая результат и вычисляя его в единицах СИ, получаем

$$R = \frac{r^2 10^{0.2(m_\odot - m_{\rm v})}}{a_\oplus}\sqrt{\frac{2}{A}} = \frac{(4.8 \cdot 10 \cdot 1.5 \cdot 10^{11})^2 \cdot 10^{0.2(-26.7-20.5)}}{1.5 \cdot 10^{11}}\sqrt{\frac{2}{0.1}} \approx 6 \cdot 10^5 \text{ м} = 6 \cdot 10^2 \text{ км}.$$

4. Определите, на какой широте можно одновременно наблюдать звезды $\alpha\ For$ $(\alpha = 3^h 12^m, \delta = -28°59')$ и $\varepsilon\ CMa$ $(\alpha = 6^h 58^m, \delta = -28°58')$ на горизонте? Атмосферной рефракцией пренебречь.

Решение (8 баллов):

Поскольку рефракцией можно пренебречь, то в момент появления звезд на горизонте мы можем считать высоту равной нулю. Также, поскольку значения склонений звезд очень близки, можно считать их находящимися на одной суточной параллели. Тогда для часового угла t, склонения светила δ и широты φ справедливо соотношение

$$\cos t = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta,$$

которым можно воспользоваться как готовым фактом, а можно вывести, построив сферический треугольник с вершинами в полюсе мира, зените и светиле и записав для него теорему косинусов.

В момент нахождения звезд на горизонте они располагаются на суточной параллели симметрично относительно небесного меридиана. При этом разность часовых углов равна разности прямых восхождений: $\Delta t = t_1 - t_2 = \alpha_2 - \alpha_1$, поскольку звезды наблюдаются одновременно в момент звездного времени $s = t_{1,2} + \alpha_{1,2}$.

Рассмотрим точку наблюдения в северном полушарии. Часть суточной параллели звезд с отрицательным склонением, находящаяся над горизонтом, не превосходит половины всей параллели. Поскольку звезды одновременно видны на горизонте, то длина находящейся над горизонтом части суточной параллели равна разности прямых восхождений, а часовой угол заходящей звезды равен половине длины данного участка параллели. Тогда получим выражение для широты:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}}{\operatorname{tg}\delta} = -\frac{\cos\left(\frac{1^h 53^m}{24^h} \cdot 360°\right)}{\operatorname{tg}(-28°59')} \approx -\frac{\cos(30°)}{-\operatorname{tg}(30°)} = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/3} = 1.5.$$

Можно вспомнить табличные значения тангенсов: $\operatorname{tg} 45° = 1$, $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3} \approx 1.7$. Искомая широта заключена в данном интервале. В качестве пробного значения можно рассмотреть $55°$ и оценить тангенс такого угла:

$$\operatorname{tg}(55°) = \operatorname{tg}(60° - 5°) = \frac{\operatorname{tg} 60° - \operatorname{tg} 5°}{1 + \operatorname{tg} 60° \operatorname{tg} 5°} \approx \frac{\sqrt{3} - 5/57.3}{1 + \sqrt{3} \cdot 5/57.3} \approx 1.4.$$

У искомого угла тангенс несколько больше, поэтому для оценки можно принять значение $\varphi = 56^\circ$ или 57°. Еще один способ — вспомнить определение тангенса как отношения катетов прямоугольного треугольника, построить треугольник с нужным отношением и измерить угол в нем с помощью транспортира.

Теперь рассмотрим ситуацию для наблюдателя в южном полушарии. В данном случае над горизонтом будет находиться бóльшая часть суточной параллели звезд. Модуль часового угла звезд будет равен дополнению полуразности прямых восхождений до 12 часов:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\cos\left(12^h - \frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right)}{\operatorname{tg}\delta} =\approx -\frac{\cos(150^\circ)}{-\operatorname{tg}(30^\circ)} \approx -1.5.$$

Поскольку тангенс является нечетной функцией, то в данном случае широта равна $-56^\circ \div -57^\circ$, и это второй возможный ответ задачи.

5. При рентгеновских наблюдениях нейтронной звезды с массой, равной $1.4\ \mathfrak{M}_\odot$, и радиусом 11 км была найдена эмиссионная линия с энергией квантов 400 кэВ. В результате какого процесса эта линия образовалась? На какой высоте над поверхностью звезды этот процесс происходил?

Решение (8 баллов):

Ключевым для решения задачи является ответ на первый вопрос. Нужно подобрать такой процесс, который приводил бы к излучению фотонов с практически одинаковой энергией, поскольку в противном случае линия не будет выделяться в спектре.

Переходы электронов в атомах не годятся, соответствующие энергии слишком малы. Можно было бы предположить, что речь идет о переходе в практически полностью ионизованном тяжелом атоме, однако можно либо знать, что соответствующие линии попадают максимум в мягкий рентгеновский диапазон (с энергиями на два порядка меньшими, чем требуется), либо догадаться, что характерные энергии таких переходов должны максимум на два-три порядка превышать характерные энергии обычных переходов в обычных атомов (из-за отсутствия в природе химических элементов с номерами около 100 и выше). Возможно, кто-либо из участников знает о существовании циклотронных линий в спектрах нейтронных звезд (возникающих из-за движения заряженных частиц в сильнейших магнитных полях), однако их энергии также на порядок меньше, и, главное, это линии поглощения. При ядерных реакциях образуются γ-кванты, энергия которых существенно больше.

В итоге остается один процесс, который, с одной стороны, достаточно распространен, с другой — приводит к образованию фотонов примерно нужной энергии. Это аннигиляция электрон-позитронных пар. Однако в этом случае должна образовываться линия с энергией 511 кэВ (это энергия покоя электрона), и это означает, что излучение претерпело красное смещение $z = \frac{511-400}{511} \approx \frac{1}{5}$.

Вследствие чего оно могло появиться? Нейтронные звезды с очень большим трудом наблюдаются даже в близких галактиках, так что космологическую природу красного смещения можно исключить сразу, оно для этого чрезмерно велико. Допплеровское смещение также не подходит — при таком z объект должен двигаться относительно нас с околосветовой скоростью, а относительные скорости звезд в Галактике (и скорости галактик друг относительно друга) на порядки меньше. Остается один вариант — гравитационное красное смещение. В самом деле, если излучение образуется где-то недалеко от поверхности нейтронной звезды (что косвенно следует из самой формулировки вопроса задачи), то это означает, что свет выходит из гравитационной потенциальной ямы, созданной объектом, чей радиус лишь в несколько раз превышает радиус Шварцшильда, и гравитационное красное смещение в такой ситуации должно быть вполне заметным.

Осталось оценить величину гравитационного красного смещения, которую создает объект массы $\mathfrak{M}$ для излучения, образующегося на расстоянии r от него. Поскольку $z \approx \frac{|\varphi|}{c^2} = \frac{G\mathfrak{M}}{c^2 r}$

(где φ — гравитационный потенциал), из имеющихся данных можно сразу вычислить r. В результате оказывается, что $r \approx 11$ км, т.е. процесс аннигиляции происходит практически на поверхности нейтронной звезды.