10 класс

1. Согласно «Сильмариллиону», движущиеся вокруг Арды Луна (*Итиль*) и Солнце (*Анор*) были созданы для освещения земель после гибели Древ Валар. Предположим, что Итиль и Анор движутся по круговым орбитам почти одинаковых радиусов, причем радиус орбит в несколько раз превышает радиус Арды. Известно, что угловые диаметры Итиль и Анора равны $0.5°$, видимая звездная величина Анора в зените совпадает с солнечной. Определите видимую звездную величину Итиль в «полнолуние», считая, что Итиль отражает 40% падающего на ее поверхность света Анора.

Решение (8 баллов):

Обозначим радиус орбит Итиль и Анора как d, радиус Арды как R, светимость Анора как L_A. Равенство видимых звездных величин Анора и Солнца обозначает равенство освещенностей от данных объектов. Поскольку освещенности прямо пропорциональны светимости и обратно пропорциональны квадратам расстояний, получим выражение:

$$\frac{L_A}{(d-R)^2} = \frac{L_\odot}{l^2},$$

где l — астрономическая единица, а $L_\odot$ — светимость Солнца. Таким образом, светимость Анора равна $L_A = L_\odot \cdot (d-R)^2/l^2$.

Тогда количество энергии, которое падает за секунду на Итиль в полнолуние, равно

$$\mathcal{E} = \frac{L_A}{4\pi(2d)^2} \cdot \pi r^2 = L_\odot \cdot \frac{(d-R)^2}{l^2} \cdot \frac{\pi r^2}{4\pi(2d)^2},$$

где r — радиус Итиль. Тогда освещенность на поверхности Арды, создаваемая Итиль, оказывается равной

$$\frac{0.4 \cdot \mathcal{E}}{4\pi(d-R)^2} = 0.4 L_\odot \cdot \frac{(d-R)^2}{l^2} \cdot \frac{\pi r^2}{4\pi(2d)^2} \frac{1}{4\pi(d-R)^2} = \\ = 0.4 \frac{L_\odot}{4\pi l^2} \cdot \frac{\pi r^2}{4\pi(2d)^2} = 0.4 \frac{L_\odot}{4\pi l^2} \cdot \frac{r^2}{16 d^2} = 0.4 E_\odot \cdot \frac{(\alpha/2)^2}{16},$$

где α — видимый угловой диаметр Итиль.

Для определения видимой звездной величины сопоставим полученную освещенность с освещенностью от Солнца:

$$m_\odot - m = 2.5 \lg\left(\frac{E}{E_\odot}\right) = 2.5 \lg\left(0.4 \frac{(\alpha/2)^2}{16}\right) \approx 2.5 \lg(10^{-6}) = -15.$$

Поскольку видимая звездная величина Солнца равна -27^m, то видимая звездная величина Итиль получается равной -12^m.

2. Двойная звезда с обращающимися по круговой орбите компонентами равных масс наблюдается на телескопе с диаметром 50 см. Известно, что каждый компонент имеет предельную для данного телескопа видимую звездную величину при наблюдении глазом, а угловое расстояние между звездами совпадает с разрешающей способностью телескопа. Обе звезды являются звездами главной последовательности. Каков период обращения данных звезд, если расстояние до них равно 1000 пк?

Решение (8 баллов):

Связь предельной видимой звездной величины с диаметром телескопа можно представить формулой

$$m_{\lim} - 6 = 5 \lg \left(\frac{D}{5 \text{ мм}} \right), \quad m_{\lim} = 6 + 5 \cdot 2 = 16.$$

Абсолютная звездная величина компонентов равна

$$M = m + 5 - 5 \lg r = 16 + 5 - 5 \lg 1000 = 6.$$

Найдем светимость каждого компонента L, сравнив звезду с Солнцем:

$$M - M_\odot = 2.5 \lg \left(\frac{L_\odot}{L} \right), \quad 1.2 = 2.5 \lg \left(\frac{L_\odot}{L} \right), \quad L/L_\odot \approx 1/3.$$

Поскольку для звезд главной последовательности приблизительно выполняется пропорциональность $L \propto \mathfrak{M}^4$, где $\mathfrak{M}$ — масса звезды, то в данном случае масса звезды будет равна $(1/3)^{1/4} \mathfrak{M}_\odot \approx \frac{3}{4} \mathfrak{M}_\odot$.

Определим большую полуось орбиты звезд. Разрешающая способность телескопа равна $\alpha \approx \lambda/D = 5 \cdot 10^{-7}/0.5 = 10^{-6}$. Тогда большая полуось орбиты равна $\alpha \cdot r \approx 10^{-6} \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^5 = 2 \cdot 10^2$ а.е.

Третий закон Кеплера в системе единиц «а.е. — год — масса Солнца» имеет вид

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{1}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2},$$

поэтому

$$P = \sqrt{\frac{a^3}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}} \approx \sqrt{\frac{2^3 \cdot 10^6}{1.5}} \approx 2 \cdot 10^3 \text{ лет.}$$

3. По-словенски Млечный Путь называется «Римской дорогой» (*Rimska cesta*). Если все дороги ведут в Рим, то уж Римская точно должна. Верно ли это для жителя Любляны, наблюдающего проходящий через зенит Млечный Путь? Найдите угол между направлением на Рим и направлением, задаваемым «Римской дорогой». Координаты столицы Словении Любляны: 46° с.ш., 14°30′ в.д., координаты Рима: 42° с.ш., 12°30′ в.д. Считайте что координаты северного полюса Галактики $\alpha = 12^h 50^m$ и $\delta = +27°$.

Решение (8 баллов):

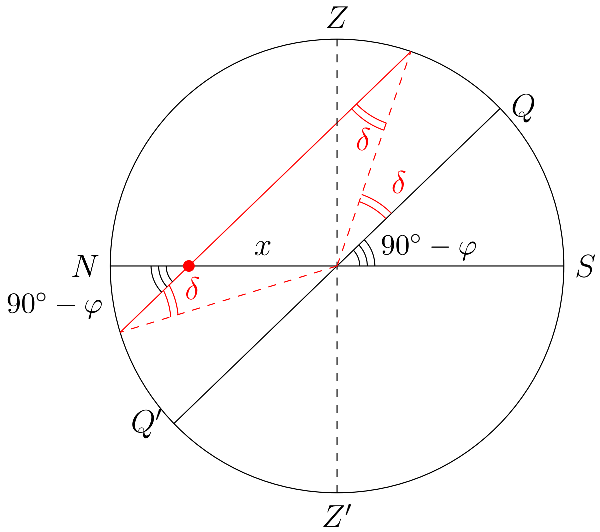
Направления на полюса Галактики перпендикулярны плоскости Млечного Пути (которая соответствует некоторому большому кругу на небесной сфере). Поэтому если Млечный Путь в некоторый момент проходит через зенит, то полюса Галактики в этот же момент находятся на горизонте.

Если «Римская дорога» действительно ведет в Рим, то это означает, что азимут одной из точек пересечения Млечного Пути с горизонтом совпадает с азимутом Рима в Любляне, а в этом случае азимут Рима и азимут полюса Галактики должны отличаться на 90°. Как следствие, отличие разности этих азимутов от 90° и будет углом между направлением на Рим и направлением, задаваемым «Римской дорогой».

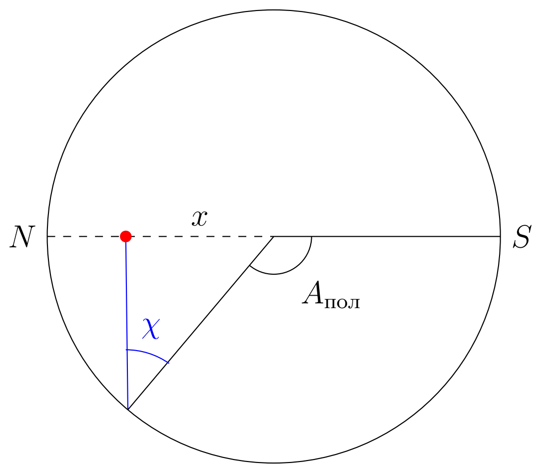
Начнем с поиска азимута Рима. Он находится не слишком далеко от Любляны, поэтому можно ограничиться плоским приближением. Из данных задачи следует, что Рим на 4° южнее и на 2° западнее Любляны. Учитывая, что один градус долготы на широте $\varphi \approx 45°$ соответствует расстоянию, в $1/\cos\varphi = \sqrt{2} \approx 1.4$ меньшему, чем градус широты, получаем, что тангенс азимута Рима $\operatorname{tg} A_{\text{Рим}} \approx 1.4/4 \approx 1/3$, а сам азимут $A_{\text{Рим}} \approx 20°$ (его можно оценить по значению тангенса, считая угол малым: поскольку Млечный Путь все же не бесконечно тонкий, погрешность даже в несколько градусов вполне допустима).

Осталось оценить азимут полюса Галактики на горизонте. Это можно сделать с помощью сферической тригонометрии (если участник умеет ей пользоваться), однако мы изложим технически более простое решение, позволяющее при некоторой аккуратности (а также при наличии линейки, циркуля и транспортира, использование которых правилами олимпиады не запрещено) обойтись вообще без вычислений.

вид в плоскости меридиана



вид в плоскости горизонта



Построим проекцию небесной сферы на плоскость небесного меридиана для Любляны (левый рисунок). Тут NS — горизонт, а QQ' — небесный экватор. Нарисуем на этой проекции суточную параллель полюса Галактики (сплошная красная линия) и найдем точку ее пересечения с горизонтом (большая красная точка). Затем построим еще одну проекцию небесной сферы, только теперь на плоскость горизонта. Перенеся на нее большую красную точку с предыдущего рисунка, мы найдем положение точки захода полюса, если опустим перпендикуляр с линии NS вниз до пересечения с окружностью. Получившийся угол $A_{\text{пол}}$ — это азимут точки захода полюса. Поскольку все откладываемые углы известны, то при построении обоих чертежей можно отмерять правильные значения углов, после чего построенный азимут нужно будет просто измерить транспортиром.

Однако те же рисунки позволяют и вычислить результат численно. На левом рисунке для треугольника «центр сферы – точка захода – нижняя точка суточной параллели» можно записать теорему синусов, из которой следует, что

$$\frac{x}{\sin\delta} = \frac{1}{\sin(90° + \varphi)}$$

(радиус небесной сферы считается равным единице), а из правого рисунка следует, что $x = \sin\chi$. Отсюда

$$\sin\chi = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi} \approx \frac{9}{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$

поэтому $\chi \approx 40°$, а $A_{\text{пол}} = 90° + \chi$.

Последний вывод означает, что χ — это как раз и есть азимут, на который направлена «Римская дорога», и это означает, что для жителя Любляны Млечный Путь и в самом деле довольно неплохо указывает на Рим, отклонение от правильного направления составляет около $20°$ к западу. Можно также заметить, что Словения простирается на восток от Любляны примерно на $2°$, так что в восточной Словении название «Римская дорога» является совершенно точным.

Заметим, что при решении задачи можно было аналогичным образом найти азимут не только точки захода полюса, но и точки восхода (или захода, но южного полюса Галактики), получив тем самым второе возможное решение этой части задачи. Однако после определения азимута Рима (или просто осознания, что Рим находится юго-западнее Любляны) становится очевидным, что второе решение дает заведомо худшее совпадение направлений, чем первое. В самом деле, из соображений симметрии можно заключить, что угол между направлением на Рим и направлением «Римской дороги» в этом случае составит около $60°$.

Примечание. Возможно, жителям Словении было бы чуть проще оценить правдоподобность их названия Млечного Пути, но, как и в одной из задач 5–6 классов, соревнование честное — в этой параллели и в этом туре участников из Словении не было, что и позволило использовать задачу.

4. В галактике на расстоянии 44 Мпк наблюдается мазерный радиоисточник (излучающий на фиксированной длине волны), двигающийся вблизи центральной черной дыры. Орбита источника перпендикулярна картинной плоскости, а большая ось лежит в картинной плоскости. Угловые размеры орбиты источника составляют $0''.0005$, относительное смещение спектральных линий для наблюдаемой звезды относительно лабораторной длины волны составляет от 0.008 до 0.011. Определите массу центральной черной дыры. Собственным вращением звезды пренебречь.

Решение (8 баллов):

Определим величину большой полуоси орбиты:

$$a = \frac{\alpha}{2} D = \frac{0.0005}{2} \cdot 44 \cdot 10^6 \approx 11 \cdot 10^3 \text{ а.е.}.$$

Смещение спектральных линий происходит вследствие эффекта Доплера, при этом следует учитывать как скорость удаления самой галактики, так и движение звезды в ней. Скорость удаления галактики оценим по закону Хаббла:

$$v_c = H_0 D = 68\,\text{км/с/Мпк} \cdot 44\,\text{Мпк} \approx 3 \cdot 10^3 \text{ км/с}.$$

Орбита расположена таким образом, что максимальная и минимальная лучевые скорости соответствуют расположению звезды в апоцентре и перицентре орбиты. Однако направление вращения звезды неизвестно.

$$\delta\lambda_i = \frac{v_c \pm v_\alpha}{c}, \quad \delta\lambda_j = \frac{v_c \mp v_\pi}{c}.$$

Изначально неизвестно, какое смещение соответствует перицентру, какое — апоцентру. Выразим модули скорости в апоцентре и перицентре:

$$v_\alpha = |v_c - c\delta\lambda_i|, \quad v_\pi = |v_c - c\delta\lambda_j|.$$

Заметим, что скорость в апоцентре должна быть меньше скорости в перицентре. Вычислим значения модулей:

$$\left|3 \cdot 10^3 - 0.008 \cdot 3 \cdot 10^5\right| = 600 \text{ км/с}, \quad \left|3 \cdot 10^3 - 0.011 \cdot 3 \cdot 10^5\right| = 300 \text{ км/с}.$$

Заметим, что первое выражение без модуля положительно, второе — отрицательно. Таким образом, в перицентре скорость составляет 600 км/с, в апоцентре — 300 км/с. Скорости в перицентре и апоцентре можно выразить через параметры орбиты и массу притягивающего центра:

$$v_\pi^2 = \frac{GM}{a}\frac{1+e}{1-e}, \quad v_\alpha^2 = \frac{GM}{a}\frac{1-e}{1+e} \quad \Longrightarrow \quad v_\alpha v_\pi = \frac{GM}{a}.$$

Отсюда получим оценку для массы центрального тела:

$$M = \frac{v_\alpha v_\pi a}{G} = \frac{6 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 0.06 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1.5 \cdot 10^{11}}{6.67 \cdot 10^{-11}} = 4 \cdot 10^{36} \text{ кг} = 2 \cdot 10^6 M_\odot.$$

5. Оцените среднюю поверхностную плотность протопланетного диска, из которого была образована наша Солнечная система, если по современным представлениям отношение пылевой компоненты в диске составляет 1% от газовой компоненты, а пояс Койпера образовался на его краю.

Решение (8 баллов):

Планеты земной группы, спутники планет и астероиды образовались из пылевой компоненты, а не из газовой. Газовые гиганты — это первые сгустки пыли, которые затем притянули на себя большую массу газа и при этом не растеряли ее в процессе эволюции. Тогда для оценки можно считать, что у газового гиганта каменное ядро составляет 1% по массе. Вспомнив или примерно оценив массу Юпитера (318 масс Земли), Сатурна (95 масс Земли), Урана и Нептуна (по ≈ 15 масс Земли), а также Венеру и саму Землю, можно посчитать суммарную массу пыли, которая пошла на построение наиболее крупных планет: $3 + 1 + 2 \cdot 0.1 + 1 + 1 \approx 6$ масс Земли. Если учтем еще и Марс (0.1 массы Земли), Меркурий (в пять раз тяжелее Луны) а также все спутники (крупных порядка тридцати штук, а их масса сопоставима с массой Луны, равной 1/81 массы Земли) и астероиды (главный пояс астероидов составляет 4% массы Луны, пояс Койпера в ≈ 100 раз массивнее последнего), то оценка изменится несущественно и возрастет в лучшем случае до $7 \div 8$ масс Земли.

Таким образом, можно считать, что исходная масса диска составляла порядка $8 \cdot 10^2$ масс Земли. Размеры пояса Койпера — до $55 \div 60$ а.е. То есть общая площадь протопланетного диска составляла $\pi \cdot 60^2 \approx 10^4$ а.е.^{2}. Пространством в центре диска из-за наличия Солнца можно пренебречь, т.к. площадь, ограниченная орбитой Меркурия, заметно меньше 1 а.е.^{2}. Итого, средняя поверхностная плотность

$$\sigma = 8 \cdot 10^2/10^4 M_\oplus/\text{а.е.}^2 = 8 \times 10^{-2} M_\oplus/\text{а.е.}^2 = 5 \times 10^{23} \text{кг/а.е.}^2 \approx 20 \text{ кг/м}^2$$