

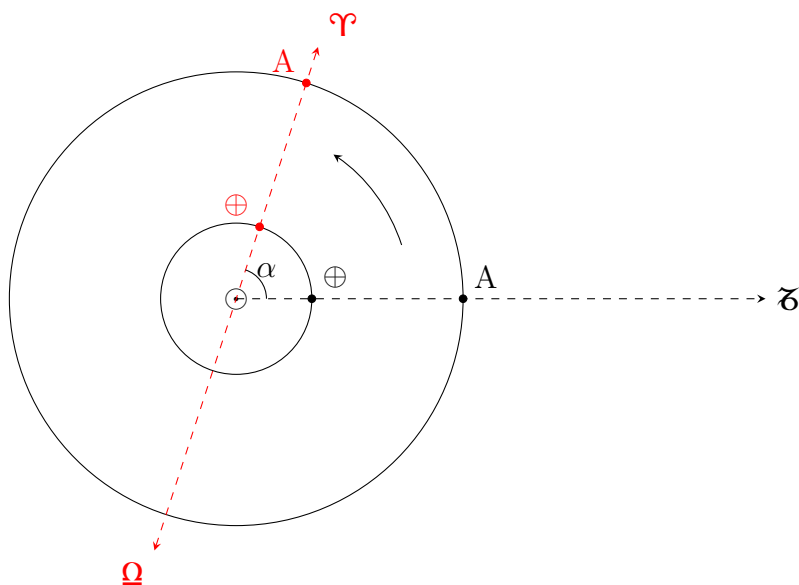
7–8 классы

1. Через каждые шесть лет некоторый астероид с круговой орбитой наблюдается в противостоянии в созвездии Козерога. Через какое время после противостояния в Козероге астероид окажется в следующем противостоянии? В каком созвездии оно будет наблюдаться?

Решение (8 баллов):

Так как только через 6 лет полностью повторяется взаимное расположение Земли, Солнца и астероида, то 6 лет — это наименьшее общее кратное сидерического (истинного) орбитального периода астероида и сидерического орбитального периода Земли. Следовательно, сидерический период астероида равен $T_A = 6$ годам.

Узнаем, через какое время S произойдет ближайшее противостояние. Пусть астероид движется вокруг Солнца в ту же сторону, что и Земля. Так как орбитальный период астероида больше земного года, то Земля движется по своей орбите быстрее него. За время полного оборота Земли вокруг Солнца (год), астероид успеет пройти некоторое расстояние по своей орбите и сместится с линии «Земля – Солнце», так что Земле придется его «догонять». В итоге, к тому времени, как три тела опять встанут в одну линию «Солнце – Земля – астероид», астероид повернется относительно Солнца по орбите на некоторый угол α , а Земля за это же время S сделает полный оборот в 360° и дополнительно повернется еще на тот же самый угол α :



Это время S , через которое повторяются одинаковые взаимные расположения Земли, Солнца и какого-то третьего тела, называется синодическим периодом. Вычислим его. С одной стороны, это время равно

$$S = T_A \frac{\alpha}{360^\circ},$$

с другой —

$$S = T_{\oplus} \frac{360^{\circ} + \alpha}{360^{\circ}},$$

где T_A и T_{\oplus} — сидерические орбитальные периоды астероида и Земли, соответственно. Отсюда после несложных преобразований получаем:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T},$$

следовательно $S = 6/5$ земного года. Стало быть, через такое время астероид и окажется в следующем противостоянии. Таким образом среди звезд он пройдет $1/6$ своей орбиты (год), т.е. 2 созвездия, плюс еще $1/5$ от $1/6$, т.е. $1/30$ орбиты, следовательно, $12/30$ или $2/5$ еще одного созвездия. Так как астероид движется против часовой стрелки, то для Солнца он окажется в 3-м по ходу годичного движения Солнца созвездии от Козерога (♄), т.е. в Овне (♈). Солнце для него находится в противоположном созвездии, т.е. в Весах (♎). Так как это противостояние, то и Земля для него в Весах. По непрерывности, для Земли Солнце тоже в Весах, а астероид в Овне.

Проверим это. За это же время Земля пройдет по своей орбите целый оборот плюс $1/5$ оборота. Т.е. она для Солнца сместится на все 12 созвездий и еще на $12/5$, т.е. тоже на 2 плюс $2/5$, т.е. окажется для Солнца тоже в 3-м от Козерога созвездии, т.е. в Овне.

Аналогичным образом можно рассмотреть гипотетический случай, когда астероид движется вокруг Солнца не в ту же сторону, что и Земля, а в обратную. В этом случае противостояние случится через $S = 6/7$ года в созвездии Змееносца. Но следует заметить, что астероидов, принадлежащих Главному поясу, с круговыми орбитами, обращающихся в обратную сторону, в Солнечной системе нет.

2. Атомарный водород в Галактике распределен в диске радиусом около 20 кпк и толщиной порядка 50 пк, масса всего атомарного водорода составляет около $7 \cdot 10^9$ масс Солнца. Зная, что масса одного атома водорода равна $2 \cdot 10^{-24}$ г, оцените концентрацию атомов водорода (количество атомов в единице объема) в диске Галактики, если известно, что масса Солнца составляет $2 \cdot 10^{30}$ кг.

Решение (8 баллов):

Определим объем, занимаемый водородом в Галактике. Объем диска можно приблизить объемом цилиндра, вычисляемым по формуле

$$V = \pi R^2 h = \pi (2 \cdot 10^4)^2 \cdot 50 \text{ пк}^3 \approx 6.3 \cdot 10^{10} \text{ пк}^3.$$

С учетом того, что в одном парсеке $3 \cdot 10^{16}$ м, объем в кубических метрах будет равен

$$V = 6.3 \cdot 10^{10} \cdot (3 \cdot 10^{16})^3 = 1.7 \cdot 10^{60} \text{ м}^3.$$

Масса атомарного водорода в системе СИ равна $M = 7 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{30} \text{ кг} = 1.4 \cdot 10^{40} \text{ кг}$. Тогда в 1 м^3 будет содержаться масса водорода, равная

$$\rho = \frac{M}{V} \approx 0.8 \cdot 10^{-20} \text{ кг}.$$

Зная массу атома водорода m , определим концентрацию как количество атомов водорода в кубическом метре:

$$n = \frac{\rho}{m} = \frac{0.8 \cdot 10^{-20} \text{ кг/м}^3}{2 \cdot 10^{-27} \text{ кг}} = 4 \cdot 10^6 / \text{м}^3.$$

3. Некоторое небесное тело с массой, равной одной массе Солнца, обладает следующим свойством: вес мухи, помещенной на его поверхность, совпадал бы с весом слона на Земле. Оцените плотность данного небесного тела. К какому типу объектов может принадлежать это тело?

Решение (8 баллов):

И слон, и муха — живые организмы, так что их средняя плотность должна быть близкой к плотности воды. Поэтому их массу можно будет оценить, если оценить размеры.

Обычная муха — это цилиндр длиной в 4-5 миллиметров и толщиной около 2 мм (ноги и крылья мы учитывать не будем, их масса явно невелика). Следовательно, ее объем составляет около 20 мм^3 . Поскольку 1 мм^3 имеет массу 1 миллиграмм (мг), то массу мухи можно оценить как $m \approx 20 \text{ мг}$.

Основная часть слона (также без ног и прочих выступающих частей тела) — также цилиндр длиной около 3 м и толщиной несколько более метра. Следовательно, объем основной части слона около 3 кубических метров. Поскольку ноги, уши и хобот у слона относительно толще, чем крылья и ноги у мухи, добавим за их счет еще один кубометр. Тогда среднюю массу слона можно оценить как $M = 4$ тонны.

Вес тела определяется как произведение массы тела на ускорение свободного падения. В случае расположения тела на объекте радиуса R и массы \mathfrak{M} выражение для ускорения свободного падения имеет вид

$$g = \frac{G\mathfrak{M}}{R^2}.$$

Поскольку известно, что вес мухи оказался равным весу слона на Земле, то можно записать равенство данных весов в виде

$$m \frac{G\mathfrak{M}}{R^2} = M \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}.$$

Тогда радиус небесного тела может быть выражен формулой

$$R = R_{\oplus} \sqrt{\frac{m\mathfrak{M}}{MM_{\oplus}}} = 6.4 \cdot 10^6 \text{ м} \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}}{4 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}}} \approx 3 \cdot 10^5 \text{ м}.$$

Считая небесное тело шарообразным, определим плотность как

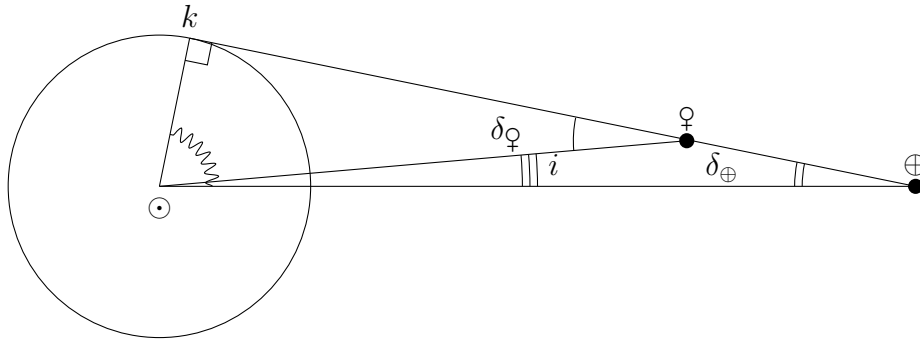
$$\rho = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{2 \cdot 10^{30} \text{ кг}}{\frac{4}{3}\pi (4.1 \cdot 10^5 \text{ м})^3} \approx 2 \cdot 10^{13} \text{ кг/м}^3.$$

Тел с такой плотностью во Вселенной не существует. У нейтронной звезды плотность больше: 10^{17} кг/м^3 , а у белого карлика — меньше: около 10^{10} кг/м^3 . Так что, к сожалению, сделать из мухи слона не получится.

4. Оцените, при каком максимальном угле наклона орбиты Венеры к эклиптике мы могли бы любоваться прохождением Венеры по диску Солнца каждое нижнее соединение?

Решение (8 баллов):

Максимальный угол наклона орбиты Венеры к эклиптике i , при котором каждое нижнее соединение будут наблюдаться ее прохождения по диску Солнца, будет тогда, когда в самом крайнем случае Венера просто коснется края Солнца (см. рисунок):



Из треугольников $\odot k \oplus$ и $\odot k \text{♀}$ получаем: $\angle k \odot \oplus = 90^\circ - \delta_\oplus$, $\angle k \odot \text{♀} = 90^\circ - \delta_\text{♀}$, а $\angle k \odot \text{♀} - \angle k \odot \oplus = i$, следовательно, $i = \delta_\text{♀} - \delta_\oplus$. Как легко заметить, это разность полуперечников (угловых радиусов) Солнца, видимых с Венеры и с Земли.

При увеличении расстояния до объекта его угловой размер уменьшается, причем, если угол небольшой, то во столько раз, во сколько увеличилось расстояние. Это можно понять, построив соответствующий рисунок и померив углы транспортиром.

Угловой радиус Солнца, видимого с Земли, равен четверти градуса, или $15'$. Радиус орбиты Венеры равен 0.7 а.е., т.е. Венера находится к Солнцу ближе, чем Земля в $1/0.7$ раза, следовательно, угловой радиус Солнца, видимый с нее, будет в $1/0.7$ раза больше, чем видимый с Земли. Следовательно,

$$i = \delta_\oplus / 0.7 - \delta_\oplus = (0.3 / 0.7) \cdot 15' \approx 6'.4$$

В реальности угол наклона орбиты Венеры к эклиптике равен $3^\circ.4$, т.е. почти в 2000 раз превышает угол i , поэтому прохождения Венеры по диску Солнца — очень редкие события.

5. Представьте себе, что сегодня утром, 14 февраля 2016 года, незадолго до восхода Солнца вы захотели посмотреть на парад всех ярких планет Солнечной системы и Луну. В каком порядке (с востока на запад) эти объекты располагались на небе? Вам известно, что: 9 марта на Земле произойдет полное солнечное затмение; неделю назад Меркурий был в наибольшей западной элонгации; Венера находится на расстоянии $28^\circ.5$ к западу от Солнца; Марс находится в созвездии Весов; 8 марта Юпитер будет в противостоянии; Сатурн не находится ни в одном из зодиакальных созвездий.

Решение (8 баллов):

Начнем с планет. Разумно предположить, что близко к восточной части горизонта будут располагаться внутренние планеты (Венера и Меркурий), которые не могут наблюдаться вдали от Солнца. Наибольшее расстояние Меркурия от Солнца, которое он достигает в максимальной элонгации, составляет около 28° , кроме того, за последнюю неделю он только приближался к Солнцу. Поэтому он находится ближе к Солнцу, чем Венера.

Солнце 14 февраля находится в созвездии Козерога, близко к границе с созвездием Водолея. А Сатурн, очевидно, находится в Змееносце — в единственном созвездии, через которое проходит эклиптика (а значит, и видимые пути планет) и при этом не относящимся к зодиакальным. Змееносец ближе к Козерогу, чем Весы, поэтому Сатурн располагается на небе восточнее Марса. Кроме того, между Козерогом и Змееносцем находится достаточно большое созвездие Стрельца, так что ближе 28.5° (т.е. ближе Венеры) к Солнцу Сатурн быть не может.

Юпитер близок к противостоянию и поэтому находится от Солнца дальше всех (на самом деле он в созвездии Льва). Итак, с порядком планет мы определились: Меркурий, Венера, Сатурн, Марс, Юпитер.

Осталось разобраться с Луной. Солнечное затмение происходит в новолуние. Поэтому 9 марта — новолуние. Предыдущее новолуние произошло на месяц (точнее, на 29.5 дня) раньше — 8 февраля. Соответственно, через неделю после новолуния, 14 февраля, Луна близка к фазе I четверти (которая на самом деле наступит 15 февраля), находится примерно в 90° восточнее Солнца и никак утром не может быть видна, так как находится под горизонтом. Так что наблюдения Луны вам пришлось бы отложить.