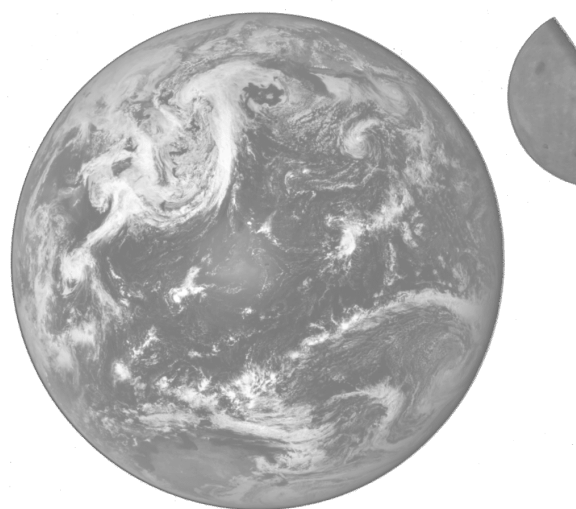
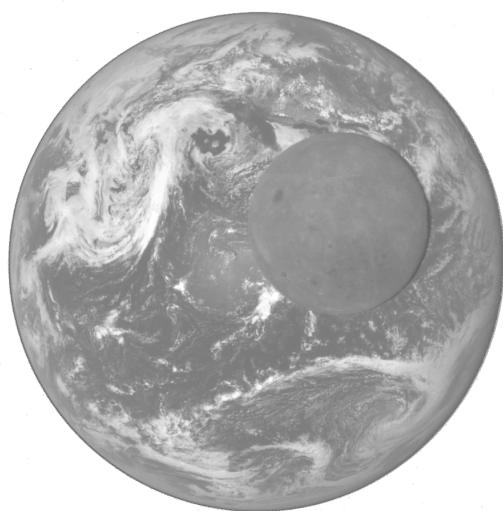
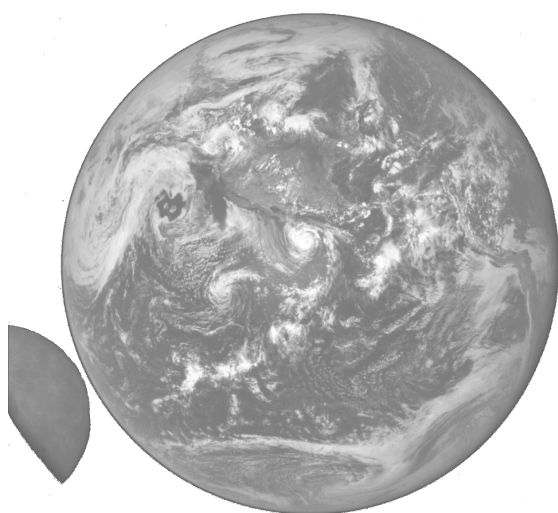


XXIII Санкт-Петербургская
астрономическая олимпиада
практический тур, решения

2016
13
марта

7–8 классы

Вам даны снимки Земли с Луной, сделанные с космического аппарата. Оцените расстояние от Земли, с которого сделаны снимки. Нарисуйте примерное расположение Земли, Луны, Солнца и аппарата во время съемки. Сколько времени прошло между первым и последним снимками? Считайте, что аппарат расположен достаточно далеко и от Земли, и от Луны. Радиус Луны примерно равен $1/4$ радиуса Земли, а расстояние от Земли до Луны равно 60 земным радиусам.

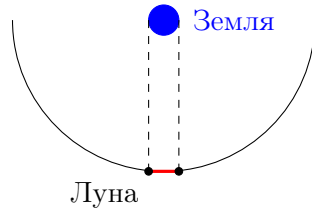


Решение (20 баллов):

Начнем с рисунка, описывающего взаимное расположение Земли, Луны, Солнца и аппарата. При рассмотрении фотографий видно, что весь диск Земли полностью освещен. Чуть сложнее заметить, что и диск Луны также освещен, причем на нем видны детали рельефа (что, ввиду отсутствия на Луне уличного освещения и т.п., ничем другим, кроме солнечного света, не объяснить). Следовательно, направление на Солнце с Земли (и с Луны) совпадает с направлением на аппарат, и все четыре

объекта находятся на одной прямой, причем Солнце — за аппаратом. В принципе, присмотревшись внимательно, можно заметить даже блик от Солнца в земной атмосфере, находящийся в середине диска.

Следовательно, рисунок должен выглядеть так¹



Сами знаете что



Измерим размеры изображений Земли $\rho_{\oplus}$ и Луны ρ_{ζ} на снимке. Так как мы в дальнейшем будем использовать отношения, то неважно, что измерять: радиусы или диаметры (хотя диаметры, конечно, измерять проще) и в каких единицах. Получаем отношение $\rho_{\oplus}/\rho_{\zeta} = 2.75$.

Так как аппарат находится далеко от Земли и от Луны, то их видимые радиусы пропорциональны их истинным радиусам и обратно пропорциональны расстоянию до них. Расстояние от аппарата до Земли r — искомое, а расстояние от аппарата до Луны равно $r - r_{\oplus\zeta}$, где $r_{\oplus\zeta}$ — расстояние между Землей и Луной. Следовательно, можно записать следующие соотношения:

$$\rho_{\oplus} \propto \frac{R_{\oplus}}{r}$$

и

$$\rho_{\zeta} \propto \frac{R_{\zeta}}{r - r_{\oplus\zeta}},$$

где $R_{\oplus}$ и R_{ζ} — истинные радиусы Земли и Луны, соответственно.

Найдем отношение видимых радиусов:

$$\frac{\rho_{\oplus}}{\rho_{\zeta}} = \frac{R_{\oplus}}{r} \frac{r - r_{\oplus\zeta}}{R_{\zeta}} = \frac{R_{\oplus}}{R_{\zeta}} - \frac{r_{\oplus\zeta}}{r} \cdot \frac{R_{\oplus}}{R_{\zeta}},$$

следовательно:

$$\frac{r_{\oplus\zeta}}{r} \cdot \frac{R_{\oplus}}{R_{\zeta}} = \frac{R_{\oplus}}{R_{\zeta}} - \frac{\rho_{\oplus}}{\rho_{\zeta}}$$

Отсюда

$$\frac{R_{\oplus}}{r} = \left(\frac{R_{\oplus}}{R_{\zeta}} - \frac{\rho_{\oplus}}{\rho_{\zeta}} \right) \cdot \frac{R_{\zeta}}{r_{\oplus\zeta}} = (4 - 2.75) \cdot \frac{1}{60 \cdot 4} \approx \frac{5}{1000}.$$

Заметим, что если мы перевернем дробь, то найдем r в единицах радиуса Земли, т.е. в тех же единицах, в которых нам даны величины в условии. Таким образом,

$$r \approx \frac{1000}{5} R_{\oplus} = 200 R_{\oplus}.$$

В принципе, тот, кто не помнит величину радиуса Земли, может ограничиться ответом и в этой форме. Кто помнит, легко получит, что $r \approx 1.3$ млн. км.

¹Тип и вид космического аппарата в условии не оговаривались, поэтому почему бы не нарисовать, например, велосипед?

Теперь оценим время. Как мы уже выяснили, во время съемки аппарат находился от Луны на расстоянии $(200 - 60) R_{\oplus} = 140 R_{\oplus}$ (или 0.9 млн. км). За время съемки центр Луны проходит угловое расстояние, примерно равное *видимому* диаметру Земли с небольшой добавкой плюс видимый диаметр самой Луны. Диаметр Земли на снимке составляет 63 мм, расстояние между краями дисков Земли и Луны на первом снимке — 1 мм, а на последнем — 5 мм, диаметр самой Луны — 23 мм, поэтому общее расстояние на снимках, проходимое центром Луны, составит $63 + 23 + 5 + 1 = 92$ мм. Поскольку, как уже известно, линейные размеры на одном и том же расстоянии пропорциональны угловым (если углы маленькие), то из этого сразу же следует вывод, что за время съемки Луна прошла расстояние, равное $92/23 = 4$ ее диаметрам, что, как мы знаем из условия, равно диаметру Земли.

Мы вынуждены считать, что аппарат неподвижен, так как никаких сведений о его движении у нас нет. Тогда скорость прохождения Луны по диску Земли равна скорости ее движения по орбите: полный оборот за 27 суток. Длина орбиты Луны равна: $2\pi r_{\oplus\zeta} = 2\pi \cdot 60 R_{\oplus}$. Следовательно, искомое время равно:

$$t = \frac{2R_{\oplus}}{2\pi \cdot 60 R_{\oplus}} \cdot 27 = \frac{27}{60\pi} \approx \frac{1}{7} \text{ суток} \approx 3.4 \text{ часа.}$$

Эта оценка похожа на правду. Если присмотреться, то видно, что детали поверхности Земли за время, прошедшее между крайними снимками, совершают чуть меньше трети полуоборота, т.е. проходит несколько менее 4 часов.